Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда» по естественным наукам

Заключительный этап
2016–2017 уч. год

Задания, ответы и критерии оценивания

11 класс

Вариант I математика

1. У Нильса гусиная ферма. Нильс подсчитал, что если продать 75 гусей, то корм закончится на 20 дней позже, чем если гусей не продавать. Если же купить дополнительно 100 гусей, то корм закончится на 15 дней раньше, чем если такую покупку не совершать. Сколько гусей у Нильса?

Ответ: 300.

Решение. пусть A — общее количество корма (в кг), x — количество корма на одного гуся в день (в кг), n — количество гусей, k — количество дней, на которые хватит корма. Тогда

$$A = kxn = (k + 20)x(n - 75) = (k - 15)x(n + 100);$$

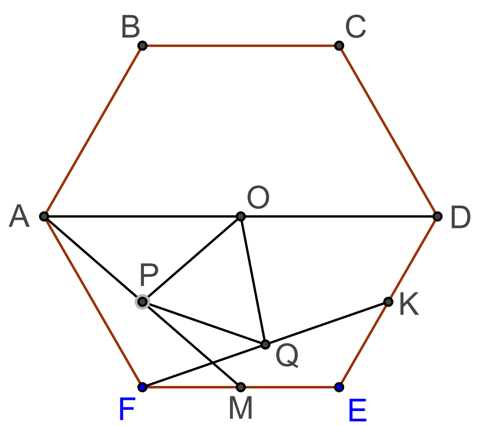
$$kn = (k + 20)(n - 75) = (k - 15)(n + 100).$$

Решая полученную систему двух уравнений с двумя переменными, находим, что $k = 60$, $n = 300$.

Оценивание. За верное решение 12 б. Если система составлена, но не решена, 4 б.

2. $ABCDEF$ — правильный шестиугольник. Точка K — середина отрезка DE, M — середина EF, O — середина AD, P — середина AM, Q — середина FK. Докажите, что треугольник OPQ — правильный.

Доказательство. Точка O — центр правильного шестиугольника. Поэтому при повороте вокруг O на 60° точка A переходит в F, M в K, отрезок AM в отрезок FK, середина AM (точка P) в середину FK (точку Q), отрезок OP в отрезок OQ.



Значит, $OP = OQ$, $\angle POQ = 60^\circ$. Отсюда и следует, что треугольник OPQ — правильный.

Замечание. Возможно и решение с помощью метода координат.

Оценивание. За верное решение 12 б.

3. Решите уравнение

$$2x + 1 + \operatorname{arctg} x \cdot \sqrt{x^2+1} + \operatorname{arctg}(x+1) \cdot \sqrt{x^2+2x+2} = 0.$$

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

Решение. Пусть $f(x) = x + \operatorname{arctg} x \cdot \sqrt{x^2+1}$. Исходное уравнение можно переписать в виде $f(x) + f(x+1) = 0$. Заметим, что функция $f(x)$ нечётная. Она возрастает на положительной полуоси (как сумма возрастающих функций). В силу нечётности она возрастает и на всей числовой прямой. Далее имеем

$$f(x) = -f(x+1); \quad f(x) = f(-x-1).$$

Поскольку возрастающая функция принимает каждое своё значение ровно один раз, справедливо $x = -x - 1$, откуда $x = -\frac{1}{2}$.

Замечание. Монотонность левой части исходного уравнения можно было установить и с помощью производной.

Оценивание. За верное решение 12 б. Если ответ угадан, но не доказано, что нет других решений, 3 б.

4. Имеется три сплава никеля, меди и марганца. В первом — 30% никеля и 70% меди, во втором — 10% меди и 90% марганца, а в третьем — 15% никеля, 25% меди и 60% марганца. Нужно получить новый сплав этих трёх металлов с 40% марганца. Какие значения может принимать процентное содержание меди в новом сплаве?

Ответ: от 40% до $43\dfrac{1}{3}$%.

Решение. Обозначим массы исходных сплавов, из которых получается новый сплав, через m_1, m_2, m_3, а массу нового сплава m. Выполняются равенства $m_1 + m_2 + m_3 = m$ и $0{,}9m_2 + 0{,}6m_3 = 0{,}4m$. Количество меди в новом сплаве равно $0{,}7m_1 + 0{,}1m_2 + 0{,}25m_3$. Пусть $x_i = m_i/m$ — доля i-го сплава в новом сплаве. Тогда для доли меди имеем выражение $y = 0{,}7x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}25x_3$.

Итак, задача формализуется следующим образом. В условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ 0{,}9x_2 + 0{,}6x_3 = 0{,}4; \\ 0 \leqslant x_1, x_2, x_3 \leqslant 1 \end{cases}$$

найти множество значений $y = 0{,}7x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}25x_3$.

Из системы линейных уравнений выразим x_3, x_1 и y через x_2:

$$x_3 = \frac{2}{3} - \frac{3}{2}x_2; \quad x_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}x_2; \quad y = 0{,}4 + 0{,}075x_2.$$

Решая теперь систему неравенств, находим значения, которые может принимать x_2. Получим $0 \leqslant x_2 \leqslant \frac{4}{9}$. Поскольку y есть линейная функция от переменной x_2, легко найти множество значений y. Далее нужно перейти к выражению доли в процентах.

Оценивание. За верное решение 14 б.

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»
по естественным наукам

Заключительный этап
2016-2017 уч. год

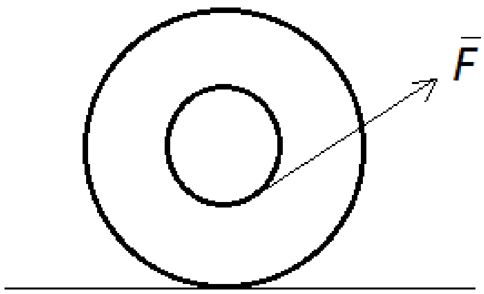
Задания, ответы и критерии оценивания

11 класс
Вариант 1

физика

Задача № 5 (15 баллов)

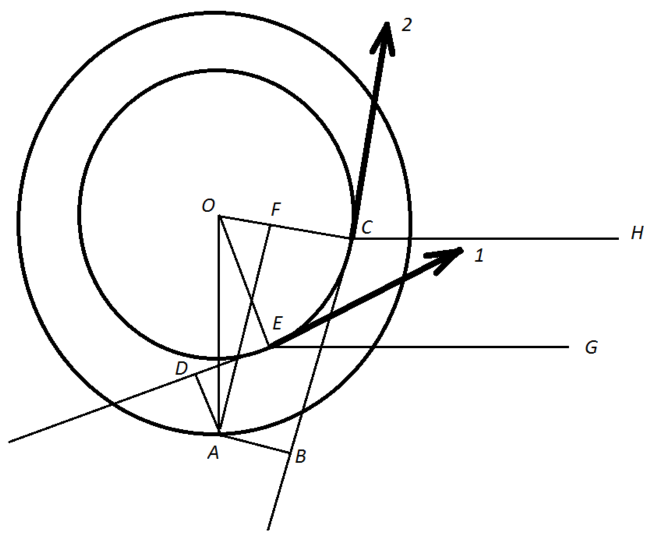
Катушку с нитками человек, находящийся справа от нее, потянул за свободный конец с силой F под углом $\alpha = 20°$ к горизонту. В результате катушка покатилась без проскальзывания с постоянным ускорением к нему. Под каким углом к горизонту должен потянуть человек за нить с той же самой силой, для того чтобы катушка теперь покатилась с тем же ускорением от него? Радиусы у катушки отличаются в два раза.



Ответ: $86{,}6°$ (в качестве ответа допускается указание значения синуса или косинуса этого угла).

Решения и критерии оценивания:

Решение № 1:



Необходимо, чтобы плечи AD и AB сил 1 и 2 были одинаковыми. **(3 балла)**

Угол $\alpha = \angle GE1 = \angle EOA = \angle OAD$. **(2 балла)**

Плечо $AD = (OA - \frac{OE}{\cos\angle EOA})\cos\angle OAD = (R_2 - \frac{R_1}{\cos\alpha})\cos\alpha = R_2\cos\alpha - R_1 = AB = FC$ **(3 балла)**

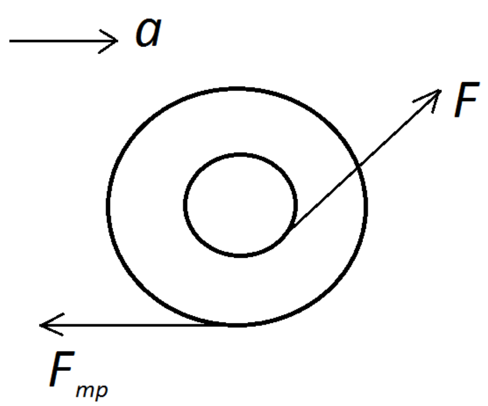
Искомый угол: $\beta = \angle HC2 = \angle FOA$. **(2 балла)**

Получаем: $\cos\angle FOA = \frac{FO}{OA} = \frac{OC - FC}{OA} = \frac{R_1 - R_2\cos\alpha + R_1}{R_2} = 2\frac{R_1}{R_2} - \cos\alpha$. **(3 балла)**

В результате: $\cos\beta = 2\cdot\frac{1}{2} - \cos 20^\circ = 1 - 0{,}940 = 0{,}06$, т.е. $\beta = 86{,}6^\circ$ **(2 балла)**

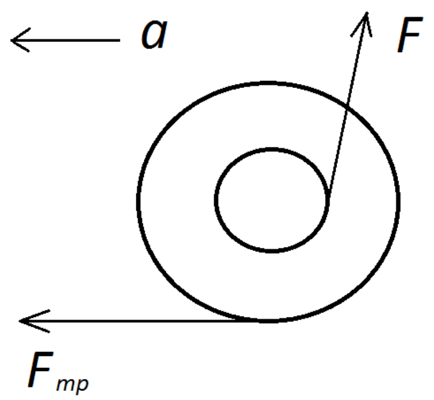
Решение №2:

Правило моментов относительно центра катушки: $F \cdot R_1 = F_{mp} \cdot R_2$ **(4 балла)**



Второй закон Ньютона в проекции на ось OX: $F\cos\alpha - F_{mp} = ma$ **(3 балла)**

После смены угла.



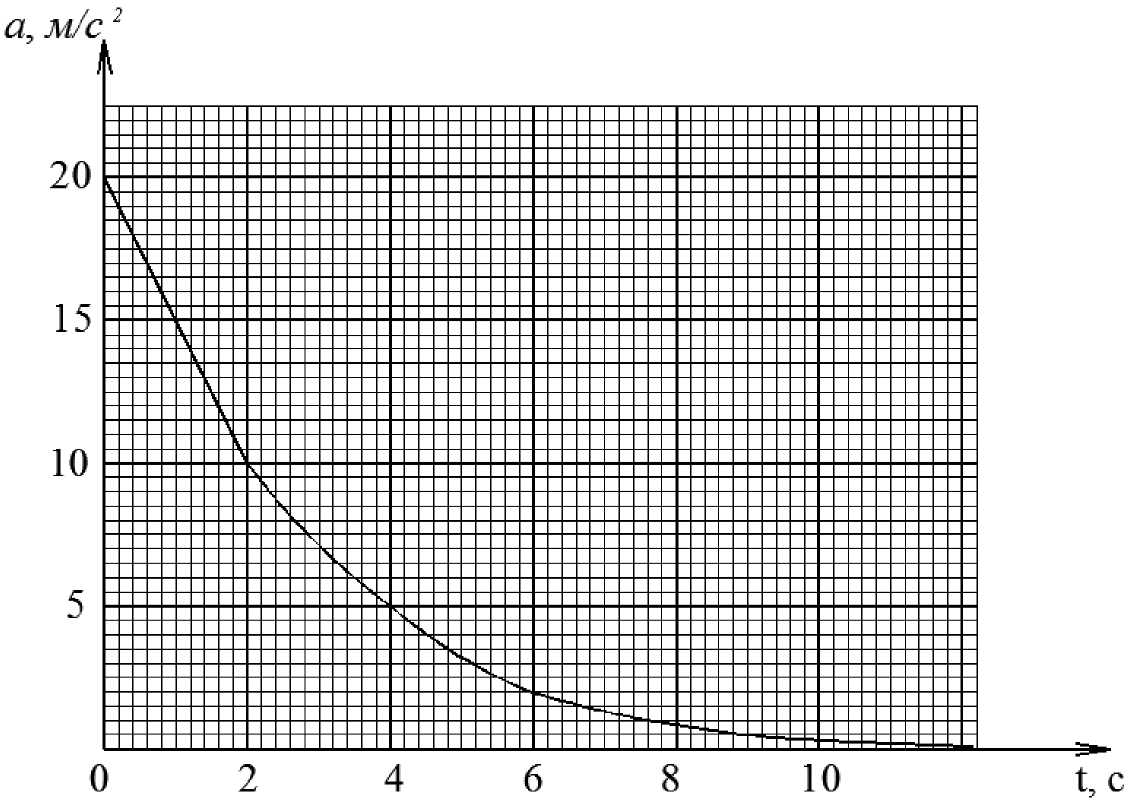
$F\cos\beta - F_{mp} = -ma$. **(3 балла)**

В результате получаем:

$\cos\beta = 2\frac{R_1}{R_2} - \cos\alpha = 2\cdot\frac{1}{2} - \cos 20^\circ = 1 - 0{,}940 = 0{,}06$, т.е. $\beta = 86{,}6^\circ$ **(5 баллов)**

Задача № 6 (15 баллов)

Тело бросают с балкона вертикально вверх. Зависимость модуля ускорения тела от времени приведена на графике. Пользуясь данной зависимостью, оцените начальную скорость тела. Ускорение свободного падения $g = 10\ м/с^2$.



Ответ: **30** ***м/с***

Решение и критерии оценивания:

График выглядит таким образом из-за наличия силы сопротивления воздуха, действующей на мяч. **(4 балла)**

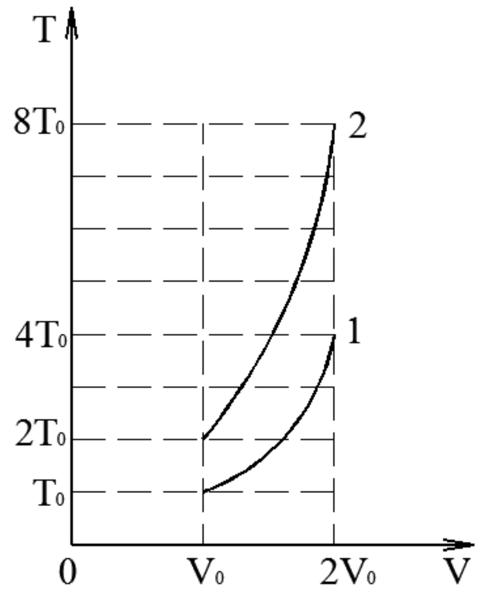
В момент времени $t = 2\ с$ ускорение равно ускорению свободного падения. Следовательно, в этот момент времени мяч находился в самой верхней точке своей траектории и его скорость $v = 0\ м/с$. **(4 балла)**

Изменение скорости равно площади под графиком. **(4 балла)**

Оценка площади дает следующий результат: $v_0 = 30\ м/с$ **(3 балла)**

Задача № 7 (10 баллов)

С одной и той же порцией одного и того же газа два раза был осуществлен процесс, в ходе которого температура газа прямо пропорциональна квадрату его объема. Найдите отношение работ газа в этих процессах.



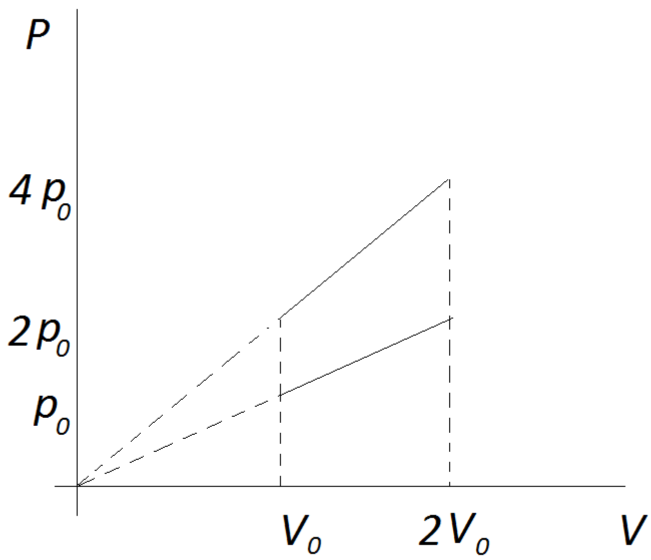
Ответ: $\frac{A_2}{A_1} = 2$

Решение и критерии оценивания:

Из условия: $T = \alpha V^2$. Следовательно, из уравнения Менделеева-Клапейрона:

$\frac{pV}{T} = const$, следует: $p = const \cdot V$. **(4 балла)**

Зависимость в координатах $p - V$ линейная:



Где начальные давления газов: $p_{20} = 2p_{10}$. **(2 балла)**

Работа – площадь под графиком в координатах $p - V$, получаем, что: **(2 балла)**

$\frac{A_2}{A_1} = 2$ **(2 балла)**

Задача № 8 (10 баллов)

Известно, что нагретое тело излучает каждую секунду с одного квадратного метра энергию, которая определяется выражением $w = \sigma T^4$, где $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ $Дж/(с \cdot м^2 \cdot К^4)$. До какой температуры нагреется кусок проволоки длиной $L = 50\,см$ и диаметром сечения $D = 2\,мм$, если к его концам в течение длительного времени прикладывается напряжение $U = 220\,В$ и по проволоке протекает ток $I = 5\,А$?

Ответ:* 1576 *К

Решение и критерии оценивания:

Мощность протекающего по проволоке тока: $P = UI$. **(2 балла)**

Мощность теплового излучения: $P = w \cdot S = \sigma T^4 L \cdot \pi D$ **(4 балла)**

Получаем:

$\sigma T^4 L \cdot \pi D = UI$. Откуда: $T = \sqrt[4]{\frac{UI}{\sigma L \pi D}} = \sqrt[4]{\frac{220 \cdot 5}{5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 0{,}5 \cdot 3{,}14 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}} = 1576\,К$ **(4 балла)**

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда» по естественным наукам

Заключительный этап 2016–2017 уч. год

Задания, ответы и критерии оценивания

11 класс

Вариант II математика

1. У Нильса гусиная ферма. Нильс подсчитал, что если продать 50 гусей, то корм закончится на 20 дней позже, чем если гусей не продавать. Если же купить дополнительно 100 гусей, то корм закончится на 10 дней раньше, чем если такую покупку не совершать. Сколько гусей у Нильса?

Ответ: 300.

Решение. пусть A — общее количество корма (в кг), x — количество корма на одного гуся в день (в кг), n — количество гусей, k — количество дней, на которые хватит корма. Тогда

$$A = kxn = (k+20)x(n-50) = (k-10)x(n+100);$$

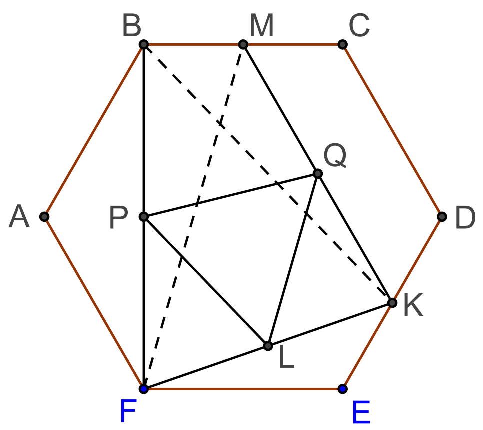
$$kn = (k+20)(n-50) = (k-10)(n+100).$$

Решая полученную систему двух уравнений с двумя переменными, находим, что $k = 20$, $n = 100$.

Оценивание. За верное решение 12 б. Если система составлена, но не решена, 4 б.

2. $ABCDEF$ — правильный шестиугольник. Точка K — середина отрезка DE, M — середина BC, L — середина FK, P — середина BF, Q — середина MK. Докажите, что треугольник LPQ — правильный.

Доказательство. При повороте вокруг центра правильного шестиугольника на 120° точка B переходит в F, середина ED (точка K) в середину CB (точку M), отрезок BK в отрезок FM.



Значит, $BK = FM$, а угол между прямыми BK и FM равен $120°$. Отрезки PL и LQ — средние линии в треугольниках FBK и FMK. Поэтому $PL = \frac{1}{2}BK = \frac{1}{2}FM = LQ$ и $\angle PLQ = 60°$. Отсюда и следует, что треугольник OPQ — правильный.

Замечание. Возможно и решение с помощью метода координат.

Оценивание. За верное решение 12 б.

3. Решите уравнение

$$2x + 2 + \operatorname{arctg} x \cdot \sqrt{x^2+1} + \operatorname{arctg}(x+2) \cdot \sqrt{x^2+4x+5} = 0.$$

Ответ: -1.

Решение. Пусть $f(x) = x + \operatorname{arctg} x \cdot \sqrt{x^2+1}$. Исходное уравнение можно переписать в виде $f(x) + f(x+2) = 0$. Заметим, что функция $f(x)$ нечётная. Она возрастает на положительной полуоси (как сумма возрастающих функций). В силу нечётности она возрастает и на всей числовой прямой. Далее имеем

$$f(x) = -f(x+2); \quad f(x) = f(-x-2).$$

Поскольку возрастающая функция принимает каждое своё значение ровно один раз, справедливо $x = -x-2$, откуда $x = -1$.

Замечание. Монотонность левой части исходного уравнения можно было установить и с помощью производной.

Оценивание. За верное решение 12 б. Если ответ угадан, но не доказано, что нет других решений, 3 б.

4. Имеется три сплава. Первый сплав содержит 60% алюминия, 15% меди и 25% магния, второй — 30% меди и 70% магния, третий — 45% алюминия и 55% магния. Нужно получить новый сплав этих трёх металлов с 20% меди. Какие значения может принимать процентное содержание алюминия в новом сплаве?

Ответ: от 15% до 40%.

Решение. Обозначим массы исходных сплавов, из которых получается новый сплав, через m_1, m_2, m_3, а массу нового сплава m. Выполняются равенства $m_1+m_2+m_3 = m$ и $0{,}15m_1+0{,}3m_2 = 0{,}2m$. Количество алюминия в новом сплаве равно $0{,}6m_1+0{,}45m_3$. Пусть $x_i = m_i/m$ — доля i-го сплава в новом сплаве. Тогда для доли алюминия имеем выражение $y = 0{,}6x_1 + 0{,}45x_3$.

Итак, задача формализуется следующим образом. В условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ 0{,}15x_1 + 0{,}3x_2 = 0{,}4; \\ 0 \leqslant x_1, x_2, x_3 \leqslant 1 \end{cases}$$

найти множество значений $y = 0{,}6x_1 + 0{,}45x_3$.

Из системы линейных уравнений выразим x_3, x_1 и y через x_2:

$$x_1 = \frac{4}{3} - 2x_2; \quad x_3 = x_2 - \frac{1}{3}; \quad y = 0{,}65 - 0{,}75x_2.$$

Решая теперь систему неравенств, находим значения, которые может принимать x_2. Получим $\frac{1}{3} \leqslant x_2 \leqslant \frac{2}{3}$. Поскольку y есть линейная функция от переменной x_2, легко найти множество значений y. Далее нужно перейти к выражению доли в процентах.

Оценивание. За верное решение 14 б.

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»
по естественным наукам

Заключительный этап
2016-2017 уч. год

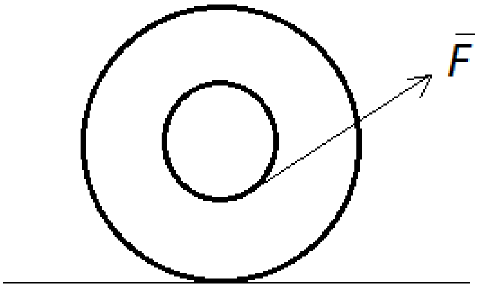
Задания, ответы и критерии оценивания

11 класс
Вариант 2

физика

Задача № 5 (15 баллов)

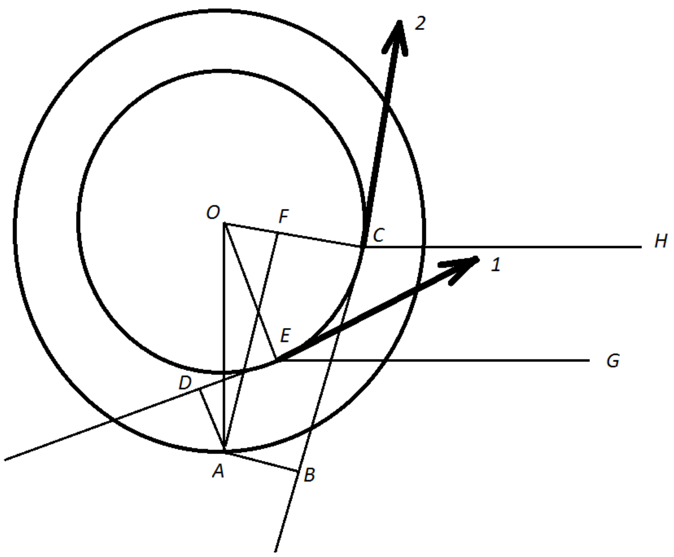
Катушку с нитками человек, находящийся справа от нее, потянул за свободный конец с силой F под углом $\alpha = 70°$ к горизонту. В результате катушка покатилась без проскальзывания с постоянным ускорением от него. Под каким углом к горизонту должен потянуть человек за нить с той же самой силой, для того чтобы катушка теперь покатилась с тем же ускорением к нему? Радиусы у катушки отличаются в два раза.



Ответ: 48,8° (в качестве ответа допускается указание значения синуса или косинуса этого угла).

Решения и критерии оценивания:

Решение №1:



Необходимо, чтобы плечи AD и AB сил 1 и 2 были одинаковыми. **(3 балла)**

Искомый угол $\beta = \angle GE1 = \angle EOA = \angle OAD$. **(2 балла)**

Плечо $AD = (OA - \frac{OE}{\cos\angle EOA})\cos\angle OAD = (R_2 - \frac{R_1}{\cos\beta})\cos\beta = R_2\cos\beta - R_1 = AB = FC$ **(3 балла)**

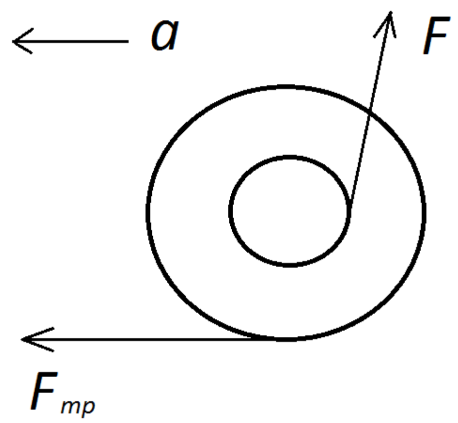
Угол: $\alpha = \angle HC2 = \angle FOA$. **(2 балла)**

Получаем: $\cos\angle FOA = \frac{FO}{OA} = \frac{OC - FC}{OA} = \frac{R_1 - R_2\cos\beta + R_1}{R_2} = 2\frac{R_1}{R_2} - \cos\beta$. **(3 балла)**

В результате: $\cos\beta = 2\cdot\frac{1}{2} - \cos 70^\circ = 1 - 0{,}342 = 0{,}658$, т.е. $\beta = 48{,}8^\circ$ **(2 балла)**

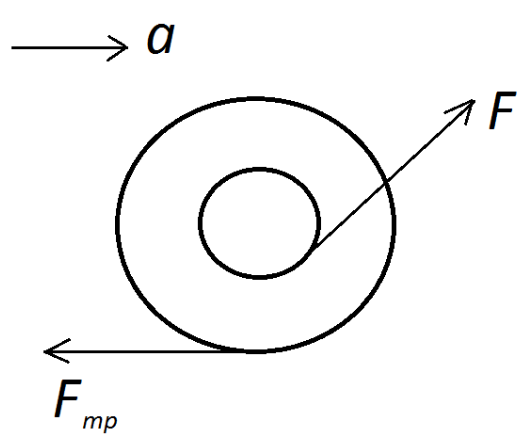
Решение №2:

Правило моментов относительно центра катушки: $F\cdot R_1 = F_{тр}\cdot R_2$ **(4 балла)**



Второй закон Ньютона в проекции на ось OX: $F\cos\alpha - F_{тр} = -ma$ **(3 балла)**

После смены угла.



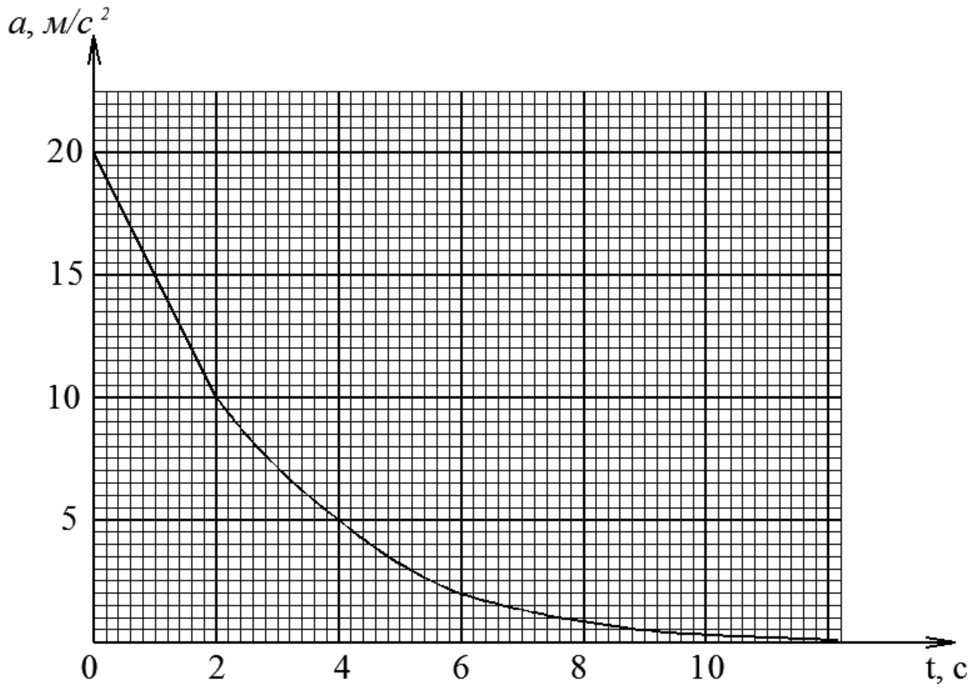
$F\cos\beta - F_{тр} = ma$. **(3 балла)**

В результате получаем:

$\cos\beta = 2\dfrac{R_1}{R_2} - \cos\alpha = 2\cdot\dfrac{1}{2} - \cos 70° = 1 - 0{,}342 = 0{,}658$, т.е. $\beta = 48{,}8°$ **(5 баллов)**

Задача № 6 (15 баллов)

Тело бросают с высокорасположенного балкона вертикально вверх. Зависимость модуля ускорения тела от времени приведена на графике. Пользуясь данной зависимостью, оцените установившуюся скорость тела. Ускорение свободного падения $g = 10\ м/с^2$.



Ответ: **25 *м/с***

Решение и критерии оценивания:

График выглядит таким образом из-за наличия силы сопротивления воздуха, действующей на мяч. **(4 балла)**

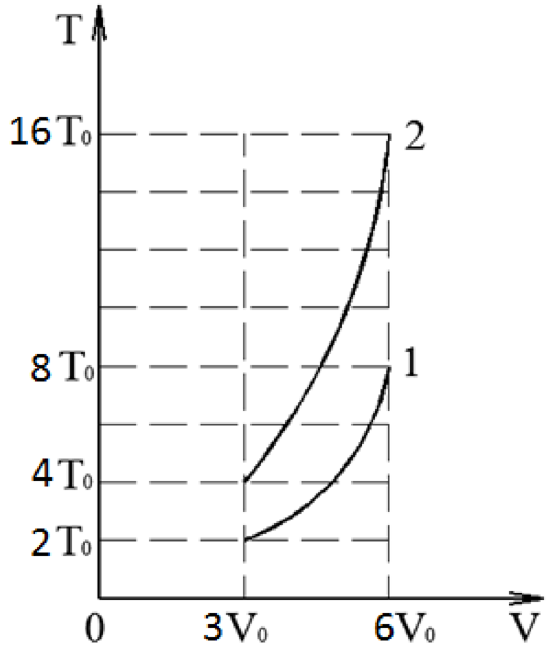
В момент времени $t = 2\ с$ ускорение равно ускорению свободного падения. Следовательно, в этот момент времени мяч находился в самой верхней точке своей траектории и его скорость $v = 0\ м/с$. **(4 балла)**

Изменение скорости равно площади под графиком. **(4 балла)**

Оценка площади дает следующий результат: $v_{уст} = 25\ м/с$ **(3 балла)**

Задача № 7 (10 баллов)

С одной и той же порцией одного и того же газа два раза был осуществлен процесс, в ходе которого температура газа прямо пропорциональна квадрату его объема. Найдите отношение работ газа в этих процессах.



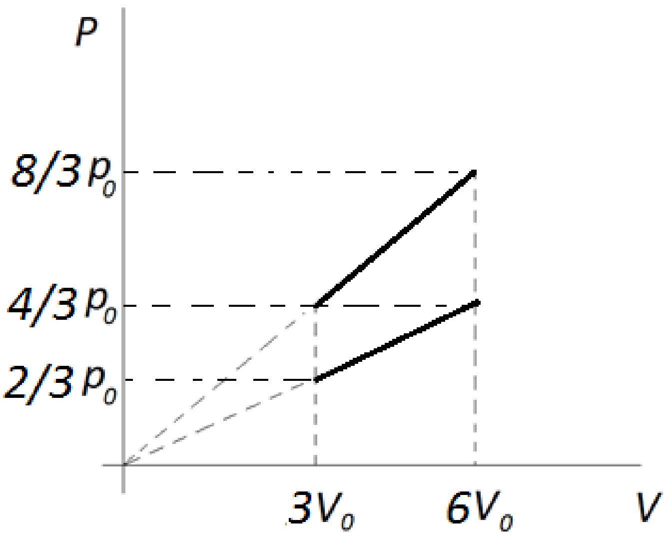
Ответ: $\frac{A_2}{A_1} = 2$

Решение и критерии оценивания:

Из условия: $T = \alpha V^2$. Следовательно, из уравнения Менделеева-Клапейрона:

$\frac{pV}{T} = const$, следует: $p = const \cdot V$. **(4 балла)**

Зависимость в координатах $p - V$ линейная:



Где начальные давления газов: $p_{20} = 2p_{10}$. **(2 балла)**

Работа – площадь под графиком в координатах $p - V$, получаем, что: **(2 балла)**

$\frac{A_2}{A_1} = 2$ **(2 балла)**

Задача № 8 (10 баллов)

Известно, что нагретое тело излучает каждую секунду с одного квадратного метра энергию, которая определяется выражением $w = \sigma T^4$, где $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ Дж/(с \cdot м^2 \cdot K^4)$. До какой температуры нагреется кусок проволоки длиной $L = 25\,см$ и диаметром сечения $D = 1\,мм$, если к его концам в течение длительного времени прикладывается напряжение $U = 220\,В$ и по проволоке протекает ток $I = 5\ А$?

Ответ: **2229 К**

Решение и критерии оценивания:

Мощность протекающего по проволоке тока: $P = UI$. **(2 балла)**

Мощность теплового излучения: $P = w \cdot S = \sigma T^4 L \cdot \pi D$ **(4 балла)**

Получаем:

$\sigma T^4 L \cdot \pi D = UI$. Откуда: $T = \sqrt[4]{\frac{UI}{\sigma L \pi D}} = \sqrt[4]{\frac{220 \cdot 5}{5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 0{,}25 \cdot 3{,}14 \cdot 1 \cdot 10^{-3}}} = 2229\,K$ **(4 балла)**

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда» по естественным наукам

Заключительный этап 2016–2017 уч. год

Задания, ответы и критерии оценивания

10 класс

Вариант I математика

1. Дан параллелограмм $ABCD$. Известно, что центры окружностей, описанных вокруг треугольников ABC и CDA, лежат на диагонали BD. Найдите угол DBC, если $\angle ABD = 40^\circ$.

Ответ: 50° или 40°.

Решение. Центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AC. Поэтому либо этот центр — середина AC (и тогда $ABCD$ — прямоугольник), либо $DB \perp AC$ (и тогда $ABCD$ — ромб). В первом случае угол DBC дополняет угол ABD до прямого, а во втором случае эти углы равны друг другу.

Оценивание. За верное решение 10 б. Если рассмотрен только случай ромба, 6 б. Если рассмотрен только случай прямоугольника, 4 б.

2. Учительница написала на доске положительное число x и попросила Колю, Петю и Васю возвести это число соответственно в 3-ю, 4-ю и 12-ю степень. Оказалось, что до запятой в Колином числе не менее 9 цифр, а в Петином не более 11 цифр. Сколько цифр до запятой в записи Васиного числа?

Ответ: 33.

Решение. Из условия следует, что $x^3 \geqslant 10^8$, а $x^4 < 10^{11}$. Отсюда $10^{32} \leqslant x^{12} < 10^{33}$. Это означает, что целая часть Васиного числа 33-значное число.

Оценивание. За верное решение 13 б.

3. Решите уравнение

$$2x + 1 + x\sqrt{x^2+1} + (x+1)\sqrt{x^2+2x+2} = 0.$$

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

Решение. Пусть $f(x) = x(1 + \sqrt{x^2+1})$. Исходное уравнение можно переписать в виде $f(x) + f(x+1) = 0$. Заметим, что функция $f(x)$ нечётная. Она возрастает на положительной полуоси (как произведение положительных возрастающих функций). В силу нечётности она возрастает и на всей числовой прямой. Далее имеем

$$f(x) = -f(x+1); \quad f(x) = f(-x-1).$$

Поскольку возрастающая функция принимает каждое своё значение ровно один раз, справедливо $x = -x - 1$, откуда $x = -\frac{1}{2}$.

Замечание. Монотонность левой части исходного уравнения можно было установить и с помощью производной.

Оценивание. За верное решение 13 б. Если ответ угадан, но не доказано, что нет других решений, 3 б.

4. Имеется три сплава никеля, меди и марганца. В первом — 30% никеля и 70% меди, во втором — 10% меди и 90% марганца, а в третьем — 15% никеля, 25% меди и 60% марганца. Нужно получить новый сплав этих трёх металлов с 40% марганца. Какие значения может принимать процентное содержание меди в новом сплаве?

Ответ: от 40% до $43\dfrac{1}{3}$%.

Решение. Обозначим массы исходных сплавов, из которых получается новый сплав, через m_1, m_2, m_3, а массу нового сплава m. Выполняются равенства $m_1 + m_2 + m_3 = m$ и $0{,}9m_2 + 0{,}6m_3 = 0{,}4m$. Количество меди в новом сплаве равно $0{,}7m_1 + 0{,}1m_2 + 0{,}25m_3$. Пусть $x_i = m_i/m$ — доля i-го сплава в новом сплаве. Тогда для доли меди имеем выражение $y = 0{,}7x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}25x_3$.

Итак, задача формализуется следующим образом. В условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ 0{,}9x_2 + 0{,}6x_3 = 0{,}4; \\ 0 \leqslant x_1, x_2, x_3 \leqslant 1 \end{cases}$$

найти множество значений $y = 0{,}7x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}25x_3$.

Из системы линейных уравнений выразим x_3, x_1 и y через x_2:

$$x_3 = \frac{2}{3} - \frac{3}{2}x_2; \quad x_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}x_2; \quad y = 0{,}4 + 0{,}075x_2.$$

Решая теперь систему неравенств, находим значения, которые может принимать x_2. Получим $0 \leqslant x_2 \leqslant \frac{4}{9}$. Поскольку y есть линейная функция от переменной x_2, легко найти множество значений y. Далее нужно перейти к выражению доли в процентах.

Оценивание. За верное решение 14 б.

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»
по естественным наукам

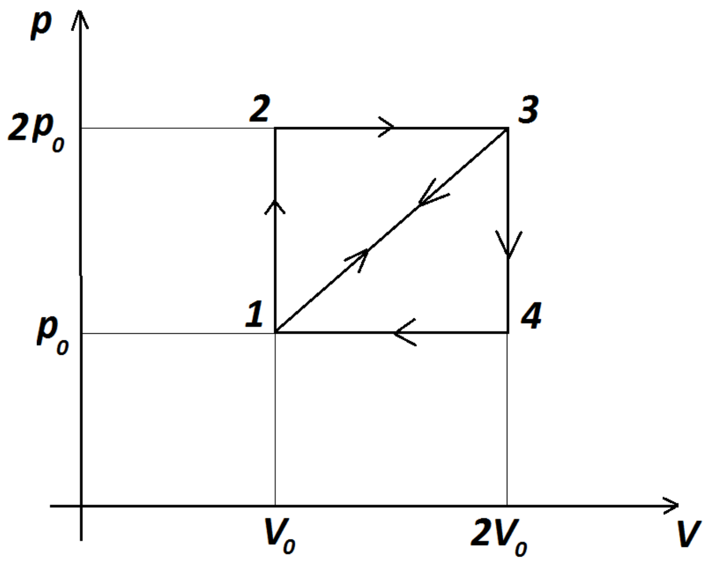
Заключительный этап
2016-2017 уч. год

Задания, ответы и критерии оценивания

10 класс
Вариант 1 **физика**

Задача № 5 (15 баллов)

С одинаковым количеством одноатомного идеального газа совершают два циклических процесса $1-2-3-1$ и $1-3-4-1$. Найдите отношение их КПД.



Ответ: $\frac{13}{12} \approx 1{,}08$

Решение и критерии оценивания:

Для цикла $1-2-3-1$: работа газа за цикл: $A = \frac{1}{2} p_0 V_0$ **(2 балла)**

Теплота, получаемая от нагревателя:

$Q = Q_{12} + Q_{23} = \Delta U_{123} + A_{123} = \frac{3}{2}(4 p_0 V_0 - p_0 V_0) + 2 p_0 V_0 = 6{,}5 p_0 V_0$ **(2 балла)**

КПД данного цикла: $\eta_{123} = \frac{A}{Q} = \frac{1}{13}$ **(2 балла)**

Для цикла $1-3-4-1$: работа газа за цикл: $A = \frac{1}{2} p_0 V_0$ **(2 балла)**

Теплота, получаемая от нагревателя:

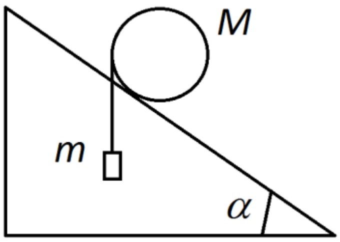
$$Q = Q_{13} = \Delta U_{13} + A_{13} = \frac{3}{2}(4p_0V_0 - p_0V_0) + 1{,}5p_0V_0 = 6p_0V_0$$ **(2 балла)**

КПД: $\eta_{134} = \frac{A}{Q} = \frac{1}{12}$ **(2 балла)**

Отношение КПД данных циклов: $\frac{\eta_{134}}{\eta_{123}} = \frac{13}{12} \approx 1{,}08$ **(3 балла)**

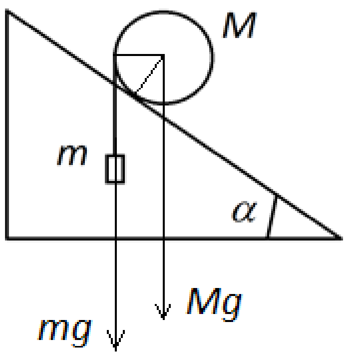
Задача № 6 (10 баллов)

Цилиндр массой $M = 1$ *кг* поместили на рельсы, наклоненные под углом $\alpha = 30°$ к горизонту (вид сбоку показан на рисунке). Груз какой минимальной массы m нужно прикрепить к намотанной на цилиндр нити, чтобы он покатился вверх? Проскальзывание отсутствует.



Ответ:* 1 *кг

Решение и критерии оценивания:



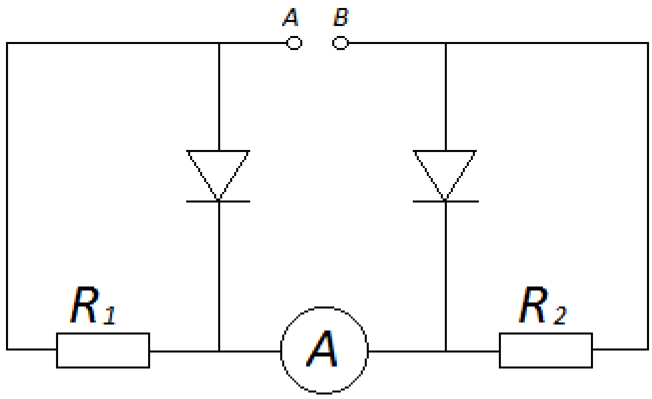
Правило моментов сил в данной ситуации относительно точки соприкосновения цилиндра с плоскостью: $mg(R - R\sin\alpha) = MgR\sin\alpha$ **(5 баллов)**

$$m(1 - \frac{1}{2}) = M\,\frac{1}{2}$$

$m = M = 1$ *кг* **(5 баллов)**

Задача № 7 (10 баллов)

В электрической цепи, показанной на рисунке сопротивления резисторов $R_1 = 10\ Ом$ и $R_2 = 20\ Ом$. К точкам A и B схемы подключается источник тока. При смене полярности его подключения показания амперметра изменяются в полтора раза. Определите внутреннее сопротивление источника. Амперметр считайте идеальным. Считайте, что сопротивление диодов в прямом направлении пренебрежимо малое, а в обратном – бесконечно большое.



Ответ:* 10 *Ом

Решение и критерии оценивания:

Когда плюс источника питания присоединяют к точке A, ток течет только через резистор R_2 и в этом случае: $I_1 = \dfrac{\varepsilon}{R_2 + r}$.

(3 балла)

При смене полярности, ток течет только через сопротивление R_1, и:

$I_2 = \dfrac{\varepsilon}{R_1 + r}$ **(3 балла)**

По условию: $I_2 = 1{,}5 I_1$ **(2 балла)**

Получаем:

$1{,}5 I_1 (R_1 + r) = I_1 (R_2 + r)$

$1{,}5(10 + r) = 20 + r$

$r = 10\ Ом$. **(2 балла)**

Задача № 8 (15 баллов)

50 одинаковых металлических шариков радиуса $R = 1\,мм$ соединили равными проводящими отрезками в цепочку, причем длина каждого отрезка соединительного провода $l = 30\,см$ намного больше величины радиуса шарика. Затем полученная конструкция была помещена в однородное электрическое поле известной напряженности $E = 100\,В/м$. Шарики располагаются на одной линии, параллельной вектору напряженности. Какие по величине заряды индуцируются на крайних в цепочке шариках.

Ответ: $8{,}17 \cdot 10^{-11}$ *Кл*

Решение и критерии оценивания:

Т.к. шарики расположены далеко друг от друга, то их можно считать уединенными, т.е. пренебречь взаимным влиянием друг на друга. Потенциал поля, создаваемый шариком:

$\varphi = k\dfrac{q}{R}$ **(2 балла)**

Заряды крайних шариков одинаковы по величине и разные по знаку. **(2 балла)**

Проводник в электрическом поле является эквипотенциальной поверхностью, поэтому разность потенциалов между крайними шариками должна быть равной нулю и получаем:

$0 = \Delta\varphi_B + (\varphi_N - \varphi_1) = \Delta\varphi_B + 2\varphi_1 = \Delta\varphi_B + 2k\dfrac{q}{R}$ **(3 балла)**

где $\Delta\varphi_B = E(N-1)l$ – разность потенциалов, создаваемая внешним полем. **(3 балла)**

Получаем: $E(N-1)l = 2k\dfrac{q}{R}$ **(3 балла)**

Окончательный результат: $q = \dfrac{E(N-1)lR}{2k} = \dfrac{100 \cdot 49 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}001}{2 \cdot 9 \cdot 10^9} = 8{,}17 \cdot 10^{-11}$ *Кл* **(2 балла)**

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда» по естественным наукам

Заключительный этап 2016–2017 уч. год

Задания, ответы и критерии оценивания

10 класс

Вариант II математика

1. Дан параллелограмм $ABCD$. Известно, что центры окружностей, описанных вокруг треугольников ABC и CDA, лежат на диагонали BD. Найдите угол DBC, если $\angle ABD = 35°$.

Ответ: $55°$ или $35°$.

Решение. Центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AC. Поэтому либо этот центр — середина AC (и тогда $ABCD$ — прямоугольник), либо $DB \perp AC$ (и тогда $ABCD$ — ромб). В первом случае угол DBC дополняет угол ABD до прямого, а во втором случае эти углы равны друг другу.

Оценивание. За верное решение 10 б. Если рассмотрен только случай ромба, 6 б. Если рассмотрен только случай прямоугольника, 4 б.

2. Учительница написала на доске положительное число x и попросила Колю, Петю и Васю возвести это число соответственно в 4-ю, 5-ю и 20-ю степень. Оказалось, что до запятой в Колином числе не менее 8 цифр, а в Петином не более 9 цифр. Сколько цифр до запятой в записи Васиного числа?

Ответ: 36.

Решение. Из условия следует, что $x^4 \geqslant 10^7$, а $x^5 < 10^9$. Отсюда $10^{35} \leqslant x^{20} < 10^{36}$. Это означает, что целая часть Васиного числа 36-значное число.

Оценивание. За верное решение 13 б.

3. Решите уравнение

$$2x + 2 + x\sqrt{x^2+1} + (x+2)\sqrt{x^2+4x+5} = 0.$$

Ответ: -1.

Решение. Пусть $f(x) = x(1 + \sqrt{x^2+1})$. Исходное уравнение можно переписать в виде $f(x) + f(x+2) = 0$. Заметим, что функция $f(x)$ нечётная. Она возрастает на положительной полуоси (как произведение положительных возрастающих функций). В силу нечётности она возрастает и на всей числовой прямой. Далее имеем

$$f(x) = -f(x+2); \quad f(x) = f(-x-2).$$

Поскольку возрастающая функция принимает каждое своё значение ровно один раз, справедливо $x = -x - 2$, откуда $x = -1$.

Замечание. Монотонность левой части исходного уравнения можно было установить и с помощью производной.

Оценивание. За верное решение 13 б. Если ответ угадан, но не доказано, что нет других решений, 3 б.

4. Имеется три сплава. Первый сплав содержит 60% алюминия, 15% меди и 25% магния, второй — 30% меди и 70% магния, третий — 45% алюминия и 55% магния. Нужно получить новый сплав этих трёх металлов с 20% меди. Какие значения может принимать процентное содержание алюминия в новом сплаве?

Ответ: от 15% до 40%.

Решение. Обозначим массы исходных сплавов, из которых получается новый сплав, через m_1, m_2, m_3, а массу нового сплава m. Выполняются равенства $m_1+m_2+m_3 = m$ и $0{,}15m_1+0{,}3m_2 = 0{,}2m$. Количество алюминия в новом сплаве равно $0{,}6m_1+0{,}45m_3$. Пусть $x_i = m_i/m$ — доля i-го сплава в новом сплаве. Тогда для доли алюминия имеем выражение $y = 0{,}6x_1 + 0{,}45x_3$.

Итак, задача формализуется следующим образом. В условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ 0{,}15x_1 + 0{,}3x_2 = 0{,}4; \\ 0 \leqslant x_1, x_2, x_3 \leqslant 1 \end{cases}$$

найти множество значений $y = 0{,}6x_1 + 0{,}45x_3$.

Из системы линейных уравнений выразим x_3, x_1 и y через x_2:

$$x_1 = \frac{4}{3} - 2x_2; \quad x_3 = x_2 - \frac{1}{3}; \quad y = 0{,}65 - 0{,}75x_2.$$

Решая теперь систему неравенств, находим значения, которые может принимать x_2. Получим $\frac{1}{3} \leqslant x_2 \leqslant \frac{2}{3}$. Поскольку y есть линейная функция от переменной x_2, легко найти множество значений y. Далее нужно перейти к выражению доли в процентах.

Оценивание. За верное решение 14 б.

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»
по естественным наукам

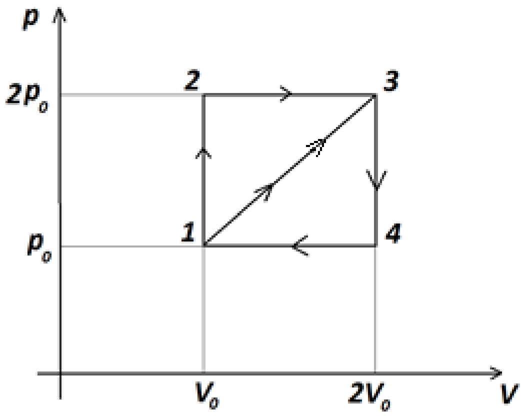
Заключительный этап
2016-2017 уч. год

Задания, ответы и критерии оценивания

10 класс
Вариант 2 физика

Задача № 5 (15 баллов)

С одинаковым количеством одноатомного идеального газа совершают два циклических процесса $1-2-3-4-1$ и $1-3-4-1$. Найдите отношение их КПД.



Ответ: $\frac{24}{13} \approx 1{,}85$

Решение и критерии оценивания:

Для цикла $1-2-3-4-1$: работа газа за цикл: $A = p_0V_0$ **(2 балла)**

Теплота, получаемая от нагревателя:

$$Q = Q_{12} + Q_{23} = \Delta U_{123} + A_{123} = \frac{3}{2}(4p_0V_0 - p_0V_0) + 2p_0V_0 = 6{,}5p_0V_0$$ **(2 балла)**

КПД данного цикла: $\eta_{1234} = \frac{A}{Q} = \frac{2}{13}$ **(2 балла)**

Для цикла $1-3-4-1$: работа газа за цикл: $A = \frac{1}{2}p_0V_0$ **(2 балла)**

Теплота, получаемая от нагревателя:

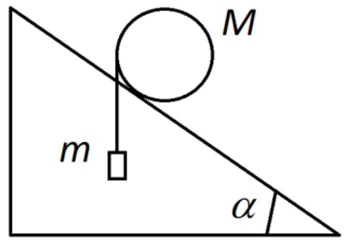
$$Q = Q_{13} = \Delta U_{13} + A_{13} = \frac{3}{2}(4p_0V_0 - p_0V_0) + 1{,}5p_0V_0 = 6p_0V_0$$ **(2 балла)**

КПД: $\eta_{134} = \dfrac{A}{Q} = \dfrac{1}{12}$ **(2 балла)**

Отношение КПД данных циклов: $\dfrac{\eta_{1234}}{\eta_{134}} = \dfrac{24}{13} \approx 1{,}85$ **(3 балла)**

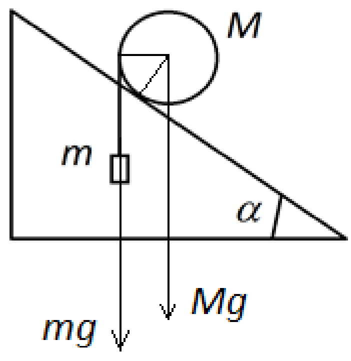
Задача № 6 (10 баллов)

Цилиндр массой $M = 0{,}5$ *кг* поместили на рельсы, наклоненные под углом $\alpha = 45°$ к горизонту (вид сбоку показан на рисунке). Груз какой минимальной массы m нужно прикрепить к намотанной на цилиндр нити, чтобы он покатился вверх? Проскальзывание отсутствует.



Ответ: **1,2** ***кг***

Решение и критерии оценивания:



Правило моментов сил в данной ситуации относительно точки соприкосновения цилиндра с плоскостью:

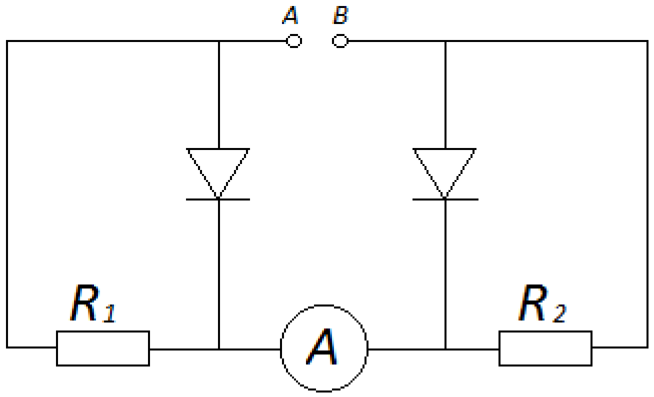
$mg(R - R\sin\alpha) = MgR\sin\alpha$ **(5 баллов)**

$m(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}) = M\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$m = M\dfrac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = 1{,}2$ *кг* **(5 баллов)**

Задача № 7 (10 баллов)

В электрической цепи, показанной на рисунке сопротивления резисторов $R_1 = 10\ Ом$ и $R_2 = 30\ Ом$. К точкам A и B схемы подключается источник тока. При смене полярности его подключения показания амперметра изменяются в полтора раза. Определите внутреннее сопротивление источника. Амперметр считайте идеальным. Считайте, что сопротивление диодов в прямом направлении пренебрежимо малое, а в обратном – бесконечно большое.



Ответ:* 30 *Ом

Решение и критерии оценивания:

Когда плюс источника питания присоединяют к точке A, ток течет только через резистор R_2 и в этом случае: $I_1 = \dfrac{\varepsilon}{R_2 + r}$.

(3 балла)

При смене полярности, ток течет только через сопротивление R_1, и:

$I_2 = \dfrac{\varepsilon}{R_1 + r}$ **(3 балла)**

По условию: $I_2 = 1{,}5 I_1$ **(2 балла)**

Получаем:

$$1{,}5 I_1 (R_1 + r) = I_1 (R_2 + r)$$

$$1{,}5(10 + r) = 30 + r$$

$r = 30\ Ом$. **(2 балла)**

Задача № 8 (15 баллов)

100одинаковых металлических шариков радиуса $R = 1\,мм$ соединили равными проводящими отрезками в цепочку, причем длина каждого отрезка соединительного провода $l = 50\,см$ намного больше величины радиуса шарика. Затем полученная конструкция была помещена в однородное электрическое поле известной напряженности $E = 1000\,В/м$. Шарики располагаются на одной линии, параллельной вектору напряженности. Какие по величине заряды индуцируются на крайних в цепочке шариках.

Ответ: $2{,}75 \cdot 10^{-9}\ Кл$

Решение и критерии оценивания:

Т.к. шарики расположены далеко друг от друга, то их можно считать уединенными, т.е. пренебречь взаимным влиянием друг на друга. Потенциал поля, создаваемый шариком:

$\varphi = k\dfrac{q}{R}$ **(2 балла)**

Заряды крайних шариков одинаковы по величине и разные по знаку. **(2 балла)**

Проводник в электрическом поле является эквипотенциальной поверхностью, поэтому разность потенциалов между крайними шариками должна быть равной нулю и получаем:

$0 = \Delta\varphi_B + (\varphi_N - \varphi_1) = \Delta\varphi_B + 2\varphi_1 = \Delta\varphi_B + 2k\dfrac{q}{R}$ **(3 балла)**

где $\Delta\varphi_B = E(N-1)l$ – разность потенциалов, создаваемая внешним полем. **(3 балла)**

Получаем: $E(N-1)l = 2k\dfrac{q}{R}$ **(3 балла)**

Окончательный результат: $q = \dfrac{E(N-1)lR}{2k} = \dfrac{1000 \cdot 99 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}001}{2 \cdot 9 \cdot 10^9} = 2{,}75 \cdot 10^{-9}\ Кл$ **(2 балла)**

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда» по естественным наукам

Заключительный этап
2016–2017 уч. год

Задания, ответы и критерии оценивания

9 класс

Вариант I математика

1. Имеются 3 кг сплава меди с оловом, в котором 40% меди и 7 кг другого сплава меди с оловом, в котором 30% меди. Какой массы нужно взять куски этих сплавов, чтобы после переплавки получить 8 кг сплава, содержащего p% меди? Найти все p, при которых задача имеет решение.

Ответ: $0{,}8p-24$ кг; $32-0{,}8p$ кг; $31{,}25 \leqslant p \leqslant 33{,}75$.

Решение. Если первого сплава берётся x кг, то второго — $(8-x)$ кг. Условия задачи накладывают ограничения на возможные значения x:

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 3; \\ 0 \leqslant 8-x \leqslant 7 \end{cases} \iff 1 \leqslant x \leqslant 3.$$

Подсчитаем количество меди в новом сплаве:

$$0{,}4x + 0{,}3(8-x) = \frac{p}{100} \cdot 8.$$

Отсюда $x = 0{,}8p-24$. Решив двойное неравенство $1 \leqslant 0{,}8p-24 \leqslant 3$, получим ответ.

Оценивание. За верное решение 11 б.

2. В треугольнике ABC медиана BK в два раза меньше стороны AB и образует с ней угол 32°. Найдите угол ABC.

Ответ: 106°.

Решение. Пусть K — середина отрезка BD. Тогда $ABCD$ — параллелограмм. В треугольнике ABD имеем равенство сторон AB и BD. Поэтому

$$\angle BDA = \frac{1}{2}(180^\circ - 32^\circ) = 74^\circ.$$

Углы ADB и CBD равны как накрест лежащие. Значит,

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = 32^\circ + 74^\circ = 106^\circ.$$

Оценивание. За верное решение 13 б.

3. Найдите все натуральные n, для которых $2n^2 + 3n - 35$ — квадрат простого числа.

Ответ: 4, 12.

Решение. Разложим квадратный трёхчлен на линейные множители: $(2n-7)(n+5) = p^2$. Если произведение двух натуральных чисел равно квадрату простого числа, то либо один из множителей равен 1 (в нашей задаче может быть только $2n-7 = 1$, откуда $n = 4$), либо множители равны друг другу ($2n - 7 = n + 5$, откуда $n = 12$). В обоих случаях число $2n^2 + 3n - 35$ оказывается квадратом простого числа.

Оценивание. За верное решение 13 б. Если ответы угаданы (и не доказано, что других решений нет), 1 б. за один ответ и 3 б. за два ответа.

4. Какую наибольшую длину может иметь замкнутая самонепересекающаяся ломаная, идущая по линиям сетки клетчатого поля размером 8×8?

Ответ: 80.

Решение. Раскрасим узлы сетки в шахматном порядке в чёрный и белый цвет. Длина замкнутой самонепересекающейся ломаной равна количеству узлов, через которые она проходит. Каждое звено ломаной соединяет чёрный и белый узел. При обходе ломаной цветы узлов чередуются, поэтому длина замкнутой ломаной является чётным числом. Поскольку всего в сетке 81 узел, длина ломаной не более 80. Соответствующий пример легко строится (рис. 1).

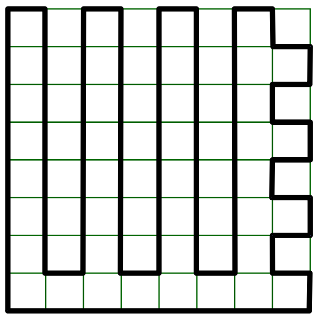


Рис. 1

Замечание. Возможно и такое рассуждение. Начнём строить замкнутую ломаную начиная с какого-то узла. Поскольку мы должны в него вернуться, горизонтальных шагов вправо столько же, сколько и влево. Значит, горизонтальных шагов чётное число. То же верно и по отношению к вертикальным шагам. Отсюда вновь получаем, что длина замкнутой ломаной (звенья которой идут по линиям по линиям сетки) является чётным числом.

Оценивание. За верное решение 13 б. Если есть только ответ, 1 б. Если приведён пример ломаной длиной 80, но нет оценки на длину ломаной, 4 б.

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»
по естественным наукам

Заключительный этап
2016-2017 уч. год

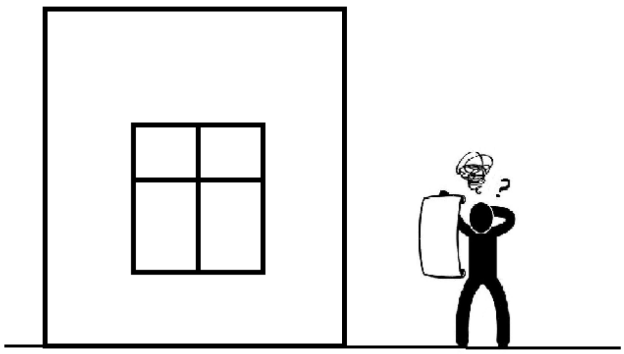
Задания, ответы и критерии оценивания

9 класс
Вариант 1

физика

Задача № 5 (15 баллов)

Человек строил себе дом. Осталось только сделать крышу. Строитель захотел добиться того, чтобы капли дождя попадающие на крышу скатывались с неё как можно быстрее. Определите угол наклона крыши, необходимый для достижения данной цели. Трением капель о крышу пренебречь.



Ответ: $\alpha = 45^\circ$

Решение и критерии оценивания:

Второй закон Ньютона для скатывающейся капли: $mg\sin\alpha = ma$. **(4 балла)**

Проходимое каплей расстояние: $S = \frac{1}{2}\frac{x}{\cos\alpha}$, где x – ширина дома.

(4 балла)

Время скатывания: $t = \sqrt{\frac{2S}{a}} = \sqrt{\frac{2\cdot\frac{1}{2}\frac{x}{\cos\alpha}}{g\sin\alpha}} = \sqrt{\frac{2x}{g\sin 2\alpha}}$.

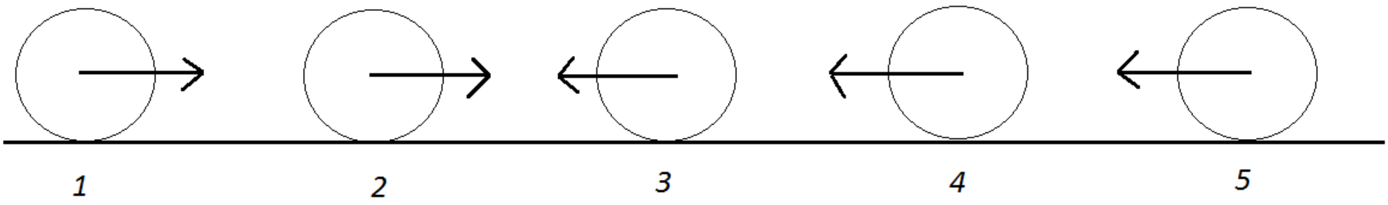
(4 балла)

Время скатывания будет минимальным, если $\sin 2\alpha = 1$, т.е. $\alpha = 45^\circ$.

(3 балла)

Задача № 6 (10 баллов)

Пять одинаковых шариков катятся по гладкой горизонтальной поверхности навстречу друг другу. Скорости первого и второго $v_1 = v_2 = 0{,}5\ м/с$, а остальных $v_3 = v_4 = v_5 = 0{,}3\ м/с$. Начальные расстояния между шарами одинаковые $l = 1\ м$. Все столкновения – абсолютно упругие. Через какое время произойдет последнее столкновение в данной системе?



Ответ: 5 *с*

Решение и критерии оценивания:

В результате абсолютно упругого удара одинаковые шарики «обмениваются» скоростями.

(4 балла)

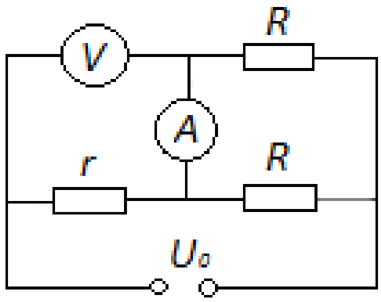
Следовательно, ситуацию можно рассматривать таким образом, как будто шарики проходят с неизменной скоростью «сквозь» друг друга. Последнее столкновение произойдет в момент «прохождения» первого шарика мимо пятого. **(4 балла)**

Соответствующее время: $t = \frac{4l}{v_1 + v_5} = \frac{4}{0{,}8} = 5\ с$

(2 балла)

Задача № 7 (15 баллов)

Источник питания и измерительные приборы в представленной схеме считать идеальными. Определите, на сколько изменятся показания приборов, если вольтметр и амперметр поменять местами. Известно, что напряжение, выдаваемое источником питания $U_0 = 45\ В$, сопротивления $R = 50\ Ом$ и $r = 20\ Ом$.



Ответ: **показания амперметра увеличились на** $0{,}4\ А$**, а вольтметра уменьшились на** $7{,}14\ В$

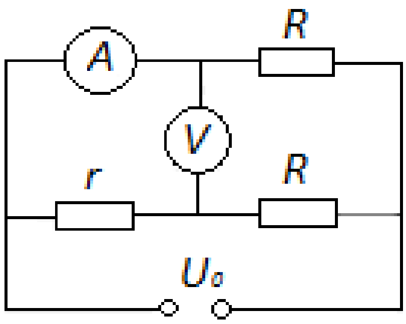
Решение и критерии оценивания:

В исходной схеме общее сопротивление: $R_{общ} = \frac{R}{2} + r = 45\ Ом$. **(2 балла)**

Следовательно, общий ток: $I_{общ} = \frac{U_0}{R_{общ}} = 1\ А$. **(2 балла)**

Т.е. начальные показания приборов: $U_1 = I_{общ}r = 20\ В$ и $I_1 = \frac{I_{общ}}{2} = 0{,}5\ А$ **(2 балла)**

Если приборы поменять местами, то:



Показание амперметра: $I_2 = \frac{U_0}{R} = \frac{45}{50} = 0{,}9\ А$. **(2 балла)**

Ток, который будет протекать через резистор r: $I = \frac{U_0}{R+r} = \frac{45}{70}$, **(2 балла)**

Следовательно, новые показания вольтметра: $U_2 = Ir = \frac{45}{70} \cdot 20 \approx 12{,}86\ В$ **(2 балла)**

Т.е. показания амперметра увеличились на $0{,}4\ А$, а вольтметра уменьшились на $7{,}14\ В$ **(3 балла)**

Задача № 8 (10 баллов)

С помощью электроплитки мощностью $P = 1000\,Вт$ нагревается некоторое количество воды. При включении электроплитки на $t_1 = 2\ мин$ температура воды увеличилась на $\Delta T = 2°C$, а после отключения нагревателя температура уменьшилась до исходного значения за $t_2 = 1\,мин$. Определите массу нагреваемой воды, если тепловых мощность тепловых потерь постоянна. Удельная теплоемкость воды $c_В = 4200\,Дж/кг \cdot °C$

Ответ:* 4,76 *кг

Решение и критерии оценивания:

Закон сохранения энергии, в ходе нагрева воды: $P \cdot t_1 = cm\Delta T + P_{потерь} \cdot t_1$. **(4 балла)**

При отключенной плитке: $P_{потерь} = \frac{cm\Delta T}{t_2}$. **(3 балла)**

В результате получаем: $m = \frac{P \cdot t_1 \cdot t_2}{c\Delta T(t_1 + t_2)} = \frac{1000 \cdot 120 \cdot 60}{4200 \cdot 2 \cdot (120 + 60)} = 4{,}76\ кг$ **(3 балла)**

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда» по естественным наукам

Заключительный этап 2016–2017 уч. год

Задания, ответы и критерии оценивания

9 класс

Вариант II

математика

1. Имеются 4 кг сплава меди с оловом, в котором 40% меди и 6 кг другого сплава меди с оловом, в котором 30% меди. Какой массы нужно взять куски этих сплавов, чтобы после переплавки получить 8 кг сплава, содержащего $p\%$ меди? Найти все p, при которых задача имеет решение.

Ответ: $0{,}8p - 24$ кг; $32 - 0{,}8p$ кг; $32{,}5 \leqslant p \leqslant 35$.

Решение. Если первого сплава берётся x кг, то второго — $(8 - x)$ кг. Условия задачи накладывают ограничения на возможные значения x:

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 4; \\ 0 \leqslant 8 - x \leqslant 6 \end{cases} \iff 2 \leqslant x \leqslant 4.$$

Подсчитаем количество меди в новом сплаве:

$$0{,}4x + 0{,}3(8 - x) = \frac{p}{100} \cdot 8.$$

Отсюда $x = 0{,}8p - 24$. Решив двойное неравенство $2 \leqslant 0{,}8p - 24 \leqslant 4$, получим ответ.

Оценивание. За верное решение 11 б.

2. В треугольнике ABC медиана BN в два раза меньше стороны AB и образует с ней угол $20°$. Найдите угол ABC.

Ответ: $100°$.

Решение. Пусть N — середина отрезка BD. Тогда $ABCD$ — параллелограмм. В треугольнике ABD имеем равенство сторон AB и BD. Поэтому

$$\angle BDA = \frac{1}{2}(180° - 20°) = 80°.$$

Углы ADB и CBD равны как накрест лежащие. Значит,

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = 20° + 80° = 100°.$$

Оценивание. За верное решение 13 б.

3. Найдите все натуральные n, для которых $2n^2 - 5n - 33$ — квадрат простого числа.

Ответ: 6, 14.

Решение. Разложим квадратный трёхчлен на линейные множители: $(2n-11)(n+3) = p^2$. Если произведение двух натуральных чисел равно квадрату простого числа, то либо один из множителей равен 1 (в нашей задаче может быть только $2n - 11 = 1$, откуда $n = 6$), либо множители равны друг другу ($2n - 11 = n + 3$, откуда $n = 14$). В обоих случаях число $2n^2 - 5n - 33$ оказывается квадратом простого числа.

Оценивание. За верное решение 13 б. Если ответы угаданы (и не доказано, что других решений нет), 1 б. за один ответ и 3 б. за два ответа.

4. Какую наибольшую длину может иметь замкнутая самонепересекающаяся ломаная, идущая по линиям сетки клетчатого поля размером 6×10?

Ответ: 76.

Решение. Раскрасим узлы сетки в шахматном порядке в чёрный и белый цвет. Длина замкнутой самонепересекающейся ломаной равна количеству узлов, через которые она проходит. Каждое звено ломаной соединяет чёрный и белый узел. При обходе ломаной цветы узлов чередуются, поэтому длина замкнутой ломаной является чётным числом. Поскольку всего в сетке 77 узлов, длина ломаной не более 76. Соответствующий пример легко строится (рис. 2).

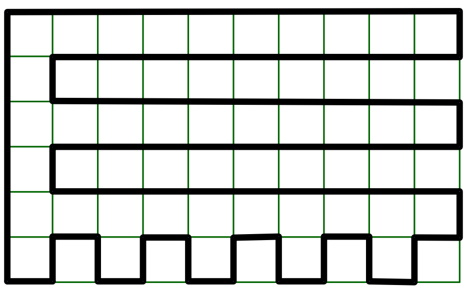


Рис. 2

Замечание. Возможно и такое рассуждение. Начнём строить замкнутую ломаную начиная с какого-то узла. Поскольку мы должны в него вернуться, горизонтальных шагов вправо столько же, сколько и влево. Значит, горизонтальных шагов чётное число. То же верно и по отношению к вертикальным шагам. Отсюда вновь получаем, что длина замкнутой ломаной (звенья которой идут по линиям по линиям сетки) является чётным числом.

Оценивание. За верное решение 13 б. Если есть только ответ, 1 б. Если приведён пример ломаной длиной 76, но нет оценки на длину ломаной, 4 б.

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»
по естественным наукам

Заключительный этап
2016-2017 уч. год

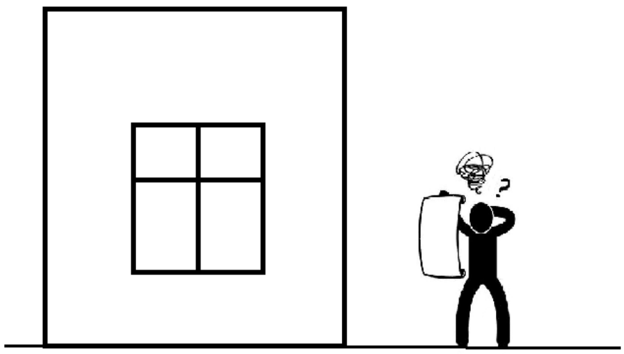
Задания, ответы и критерии оценивания

9 класс
Вариант 2

физика

Задача № 5 (15 баллов)

Человек строил себе дом. Осталось только сделать крышу. Строитель захотел добиться того, чтобы капли дождя попадающие на крышу скатывались с неё как можно быстрее. Определите угол наклона крыши, необходимый для достижения данной цели. Трением капель о крышу пренебречь.



Ответ: $\alpha = 45°$

Решение и критерии оценивания:

Второй закон Ньютона для скатывающейся капли: $mg\sin\alpha = ma$ **(4 балла)**

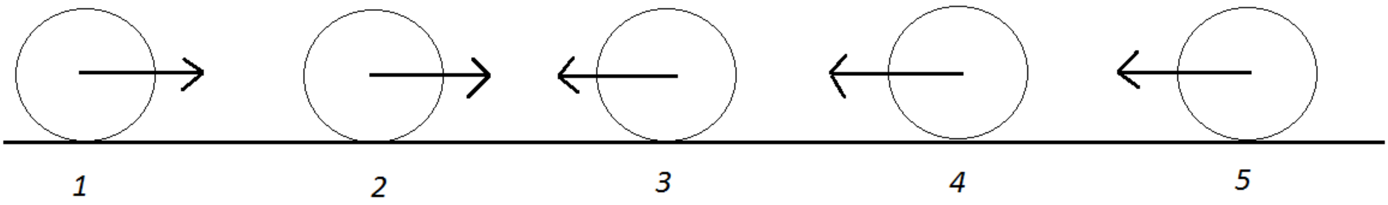
Проходимое каплей расстояние: $S = \frac{1}{2}\frac{x}{\cos\alpha}$, где x – ширина дома. **(4 балла)**

Время скатывания: $t = \sqrt{\frac{2S}{a}} = \sqrt{\frac{2\cdot\frac{1}{2}\frac{x}{\cos\alpha}}{g\sin\alpha}} = \sqrt{\frac{2x}{g\sin 2\alpha}}$. **(4 балла)**

Время скатывания будет минимальным, если $\sin 2\alpha = 1$, т.е. $\alpha = 45°$. **(3 балла)**

Задача № 6 (10 баллов)

Пять одинаковых шариков катятся по гладкой горизонтальной поверхности навстречу друг другу. Скорости первого и второго $v_1 = v_2 = 0{,}5\ м/с$, а остальных $v_3 = v_4 = v_5 = 0{,}1\ м/с$. Начальные расстояния между шарами одинаковые $l = 2\ м$. Все столкновения – абсолютно упругие. Сколько времени пройдет между первым и последним столкновениями в данной системе?



Ответ: **10 с**

Решение и критерии оценивания:

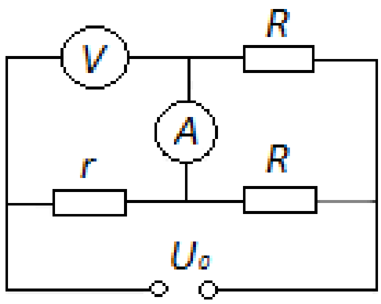
В результате абсолютно упругого удара одинаковые шарики «обмениваются» скоростями. **(4 балла)**

Следовательно, ситуацию можно рассматривать таким образом, как будто шарики проходят с неизменной скоростью «сквозь» друг друга. Первое столкновение происходит между вторым и третьим шариком. Последнее столкновение произойдет в момент «прохождения» первого шарика мимо пятого. **(4 балла)**

Соответствующее время: $t = \dfrac{3l}{v_1 + v_5} = \dfrac{3 \cdot 2}{0{,}6} = 10\ с$ **(2 балла)**

Задача №7 (15 баллов)

Источник питания и измерительные приборы в представленной схеме считать идеальными. Определите, на сколько изменятся показания приборов, если вольтметр и амперметр поменять местами. Известно, что напряжение, выдаваемое источником питания $U_0 = 90\ В$, сопротивления $R = 50\ Ом$ и $r = 20\ Ом$.



Ответ: **показания амперметра увеличились на** $0{,}8\ A$**, а вольтметра уменьшились на** $14{,}3\ B$

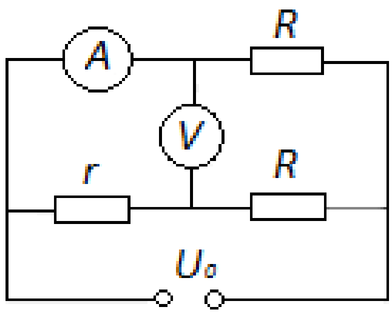
Решение и критерии оценивания:

В исходной схеме общее сопротивление: $R_{общ} = \dfrac{R}{2} + r = 45\ Ом$. **(2 балла)**

Следовательно, общий ток: $I_{общ} = \dfrac{U_0}{R_{общ}} = 2\ A$. **(2 балла)**

Т.е. начальные показания приборов: $U_1 = I_{общ} r = 40\ B$ и $I_1 = \dfrac{I_{общ}}{2} = 1\ A$ **(2 балла)**

Если приборы поменять местами, то:



Показание амперметра: $I_2 = \dfrac{U_0}{R} = \dfrac{90}{50} = 1{,}8\ A$. **(2 балла)**

Ток, который будет протекать через резистор r: $I = \dfrac{U_0}{R+r} = \dfrac{90}{70}$, **(2 балла)**

Следовательно, новые показания вольтметра: $U_2 = Ir = \dfrac{90}{70} \cdot 20 \approx 25{,}7\ B$ **(2 балла)**

Т.е. показания амперметра увеличились на $0{,}8\ A$, а вольтметра уменьшились на $14{,}3\ B$ **(3 балла)**

Задача № 8 (10 баллов)

С помощью электроплитки мощностью $P = 500\ Вт$ нагревается некоторое количество воды. При включении электроплитки на $t_1 = 1\ мин$ температура воды увеличилась на $\Delta T = 2°C$, а после отключения нагревателя температура уменьшилась до исходного значения за $t_2 = 2\ мин$. Определите массу нагреваемой воды, если тепловых мощность тепловых потерь постоянна. Удельная теплоемкость воды $c_в = 4200\ Дж/кг \cdot °C$

Ответ: **2,38 *кг***

Решение и критерии оценивания:

Закон сохранения энергии, в ходе нагрева воды: $P \cdot t_1 = cm\Delta T + P_{потерь} \cdot t_1$. **(4 балла)**

При отключенной плитке: $P_{потерь} = \dfrac{cm\Delta T}{t_2}$. **(3 балла)**

В результате получаем: $m = \dfrac{P \cdot t_1 \cdot t_2}{c\Delta T(t_1 + t_2)} = \dfrac{500 \cdot 120 \cdot 60}{4200 \cdot 2 \cdot (120 + 60)} = 2{,}38\ кг$ **(3 балла)**

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда» по естественным наукам

Заключительный этап 2016–2017 уч. год

Задания, ответы и критерии оценивания

8 класс

Вариант I математика

1. Имеются 3 кг сплава меди с оловом, в котором 40% меди и 7 кг другого сплава меди с оловом, в котором 30% меди. Какой массы нужно взять куски этих сплавов, чтобы после переплавки получить 8 кг сплава, содержащего $p\%$ меди? Найти все p, при которых задача имеет решение.

Ответ: $0{,}8p - 24$ кг; $32 - 0{,}8p$ кг; $31{,}25 \leqslant p \leqslant 33{,}75$.

Решение. Если первого сплава берётся x кг, то второго — $(8 - x)$ кг. Условия задачи накладывают ограничения на возможные значения x:

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 3; \\ 0 \leqslant 8 - x \leqslant 7 \end{cases} \iff 1 \leqslant x \leqslant 3.$$

Подсчитаем количество меди в новом сплаве:

$$0{,}4x + 0{,}3(8 - x) = \frac{p}{100} \cdot 8.$$

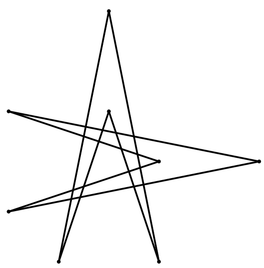
Отсюда $x = 0{,}8p - 24$. Решив двойное неравенство $1 \leqslant 0{,}8p - 24 \leqslant 3$, получим ответ.

Оценивание. За верное решение 12 б.

2. Какое наибольшее конечное количество точек пересечения могут иметь контуры двух четырёхугольников?

Ответ: 16.

Решение. Наибольшее конечное число точек пересечения получится, если каждая сторона первого четырёхугольника пересечёт каждую сторону второго четырёхугольника, что возможно, как показывает рис.



Оценивание. За верное решение 12 б. Если указано, что количество точек не больше 16, но примера нет, 4 б. Если есть пример, но нет оценки, 8 б.

3. У Нильса гусиная ферма. Нильс подсчитал, что если продать 75 гусей, то корм закончится на 20 дней позже, чем если гусей не продавать. Если же купить дополнительно 100 гусей, то корм закончится на 15 дней раньше, чем если такую покупку не совершать. Сколько гусей у Нильса?

Ответ: 300.

Решение. пусть A — общее количество корма (в кг), x — количество корма на одного гуся в день (в кг), n — количество гусей, k — количество дней, на которые хватит корма. Тогда

$$A = kxn = (k+20)x(n-75) = (k-15)x(n+100);$$

$$kn = (k+20)(n-75) = (k-15)(n+100).$$

Решая полученную систему двух уравнений с двумя переменными, находим, что $k = 60$, $n = 300$.

Оценивание. За верное решение 12 б. Если система составлена, но не решена, 4 б.

4. Могут ли числа $x^2 + 2y$ и $y^2 + 2x$, где x и y — натуральные числа, одновременно быть квадратами целых чисел?

Ответ: нет.

Решение. Наименьший квадрат, больший x^2, это $(x+1)^2$. Поэтому в случае положительного ответа на вопрос задачи, $x^2 + 2y \geqslant (x+1)^2$, откуда $2y \geqslant 2x + 1$. Аналогично получаем $2x \geqslant 2y + 1$. Ясно, что два полученных неравенства противоречат друг другу.

Оценивание. За верное решение 14 б.

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»
по естественным наукам

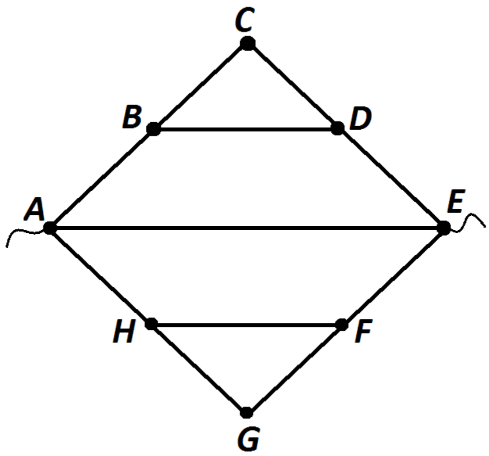
Заключительный этап
2016-2017 уч. год

Задания, ответы и критерии оценивания

8 класс
Вариант 1 физика

Задача № 5 (10 баллов)

При построении данной конструкции использовалась однородная проволока постоянного сечения. Известно, что точки B, D, F и H располагаются равно посередине соответствующих сторон квадрата $ACEG$. Сопротивление отрезка AB равно $R_0 = 1\ Ом$. Определите сопротивление всей конструкции, если в электрическую цепь её подключают точками A и E.

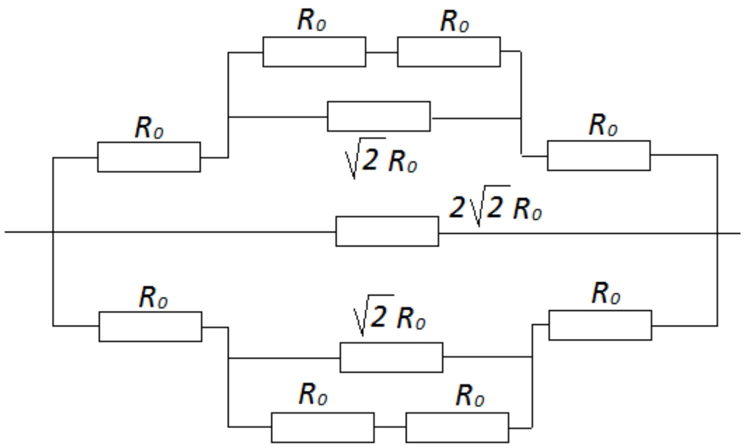


Ответ: **0,94 *Ом***

Решение и критерии оценивания:

Сопротивление резистора пропорционально его длине. **(2 балла)**

С учетом этого, предложенную схему можно заменить эквивалентной: **(4 балла)**



Её сопротивление: $R = \dfrac{4+2\sqrt{2}}{3+3\sqrt{2}} R_0 \approx 0{,}94\ Ом$ **(4 балла)**

Задача № 6 (10 баллов)

В кастрюлю налили $2\ л$ воды, взятой при температуре $t = 0\ {}^oC$, и довели её до кипения за $10\ мин$. После этого, не снимая кастрюлю с плиты, добавили лед при температуре $t = 0\ {}^oC$. И в следующий раз вода начала кипеть только через $15\ мин$. Определите массу добавленного льда. Удельная теплоемкость воды $c_в = 4200\ Дж/кг \cdot {}^\circ C$, удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}3 \cdot 10^5\ Дж/кг$, плотность воды $\rho = 1000\ кг/м^3$.

Ответ: **1,68 *кг***

Решение и критерии оценивания:

Масса исходной воды: $m_B = \rho V = 2\ кг$ **(2 балла)**

Мощность плиты в первом случае: $P = \dfrac{c_B m_B \Delta T}{t_1}$. **(2 балла)**

А во втором: $P = \dfrac{\lambda m_Л + c_B m_Л \Delta T}{t_2}$. **(2 балла)**

Получаем:

$\dfrac{c_B m_B \Delta T}{t_1} = \dfrac{\lambda m_Л + c_B m_Л \Delta T}{t_2}$. Откуда $m_Л = \dfrac{c_B m_B \Delta T t_2}{t_1(\lambda + c_B \Delta T)} = \dfrac{4200 \cdot 2 \cdot 100 \cdot 15}{10(330000 + 4200 \cdot 100)} = 1{,}68\ кг$ **(4 балла)**

Задача № 7 (15 баллов)

Для того чтобы тело полностью погруженное в жидкость находилось в равновесии, к нему прикладывают силу $F = 2\ Н$. Определите плотность тела, если его объем $V = 1\ л$, а плотность жидкости $\rho_Ж = 1000\ кг/м^3$.

Ответ: **1200 *кг/м***^{3}

Решение и критерии оценивания:

Необходимо рассматривать две ситуации: **(1 балл)**

Первая – тело пытается всплыть. В этом случае условие равновесия:

$F_a = mg + F$. **(4 балла)**

В результате получаем: $\rho_Ж gV = \rho_T Vg + F$

$\rho_T = \frac{\rho_Ж gV - F}{gV} = \frac{10-2}{10 \cdot 10^{-3}} = 800\ кг/м^3$ **(3 балла)**

Вторая – тело пытается утонуть. В этом случае условие равновесия:

$F_a + F = mg$. **(4 балла)**

В результате получаем: $\rho_Ж gV + F = \rho_T Vg$

$\rho_T = \frac{\rho_Ж gV + F}{gV} = \frac{10+2}{10 \cdot 10^{-3}} = 1200\ кг/м^3$ **(3 балла)**

Задача № 8 (15 баллов)

$100\ гр$ льда, взятого при температуре $t_Л = -5\ ^oC$, смешали с водой, взятой при температуре $t_B = 10\ ^oC$. Известно, что конечная температура в сосуде $t = 0\ ^oC$. Определите массу добавленной воды. Удельная теплоемкость воды $c_B = 4200\ Дж/кг \cdot {}^oC$, удельная теплоемкость льда $c_Л = 2100\ Дж/кг \cdot {}^oC$ удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}3 \cdot 10^5\ Дж/кг$.

Ответ: $0{,}0028\,кг \le m_B \le 0{,}811\,кг$

Решение и критерии оценивания:

Две крайние ситуации, возможные в данной задаче:

Первая ситуация – в сосуде останется только лед при температуре $t = 0\ ^oC$

(2 балла)

Уравнение теплового баланса в этом случае: $c_Л m_Л 5 = c_В m_В 10 + \lambda m_В$. **(2 балла)**

Получаем, что: $m_В = \frac{2100 \cdot 0{,}1 \cdot 5}{4200 \cdot 10 + 330000} \approx 0{,}0028\,кг$ **(2 балла)**

Вторая ситуация – в сосуде останется только вода при температуре $t = 0\ ^oC$

(2 балла)

Уравнение теплового баланса в этом случае: $c_Л m_Л 5 + \lambda m_Л = c_В m_В 10$. **(2 балла)**

Получаем, что: $m_В = \frac{2100 \cdot 0{,}1 \cdot 5 + 330000 \cdot 0{,}1}{4200 \cdot 10} \approx 0{,}811\,кг$ **(2 балла)**

Масса добавленной воды $0{,}0028\,кг \le m_В \le 0{,}811\,кг$ **(3 балла)**

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда» по естественным наукам

Заключительный этап 2016–2017 уч. год

Задания, ответы и критерии оценивания

8 класс

Вариант II математика

1. Имеются 4 кг сплава меди с оловом, в котором 40% меди и 6 кг другого сплава меди с оловом, в котором 30% меди. Какой массы нужно взять куски этих сплавов, чтобы после переплавки получить 8 кг сплава, содержащего $p\%$ меди? Найти все p, при которых задача имеет решение.

Ответ: $0{,}8p-24$ кг; $32-0{,}8p$ кг; $32{,}5 \leqslant p \leqslant 35$.

Решение. Если первого сплава берётся x кг, то второго — $(8-x)$ кг. Условия задачи накладывают ограничения на возможные значения x:

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 4; \\ 0 \leqslant 8-x \leqslant 6 \end{cases} \iff 2 \leqslant x \leqslant 4.$$

Подсчитаем количество меди в новом сплаве:

$$0{,}4x + 0{,}3(8-x) = \frac{p}{100} \cdot 8.$$

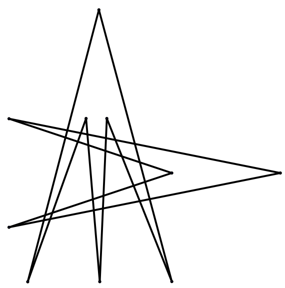
Отсюда $x = 0{,}8p-24$. Решив двойное неравенство $2 \leqslant 0{,}8p-24 \leqslant 4$, получим ответ.

Оценивание. За верное решение 12 б.

2. Какое наибольшее конечное количество точек пересечения могут иметь контуры четырёхугольника и шестиугольника?

Ответ: 24.

Решение. Наибольшее конечное число точек пересечения получится, если каждая сторона четырёхугольника пересечёт каждую сторону шестиугольника, что возможно, как показывает рис.



Оценивание. За верное решение 12 б. Если указано, что количество точек не больше 24, но примера нет, 4 б. Если есть пример, но нет оценки, 8 б.

3. У Нильса гусиная ферма. Нильс подсчитал, что если продать 50 гусей, то корм закончится на 20 дней позже, чем если гусей не продавать. Если же купить дополнительно 100 гусей, то корм закончится на 10 дней раньше, чем если такую покупку не совершать. Сколько гусей у Нильса?

Ответ: 300.

Решение. пусть A — общее количество корма (в кг), x — количество корма на одного гуся в день (в кг), n — количество гусей, k — количество дней, на которые хватит корма. Тогда

$$A = kxn = (k+20)x(n-50) = (k-10)x(n+100);$$

$$kn = (k+20)(n-50) = (k-10)(n+100).$$

Решая полученную систему двух уравнений с двумя переменными, находим, что $k = 20$, $n = 100$.

Оценивание. За верное решение 12 б. Если система составлена, но не решена, 4 б.

4. Могут ли числа $x^2 + y$ и $y^2 + x$, где x и y — натуральные числа, одновременно быть квадратами целых чисел?

Ответ: нет.

Решение. Наименьший квадрат, больший x^2, это $(x+1)^2$. Поэтому в случае положительного ответа на вопрос задачи, $x^2+y \geqslant (x+1)^2$, откуда $y \geqslant 2x+1$. Аналогично получаем $x \geqslant 2y+1$. Ясно, что два полученных неравенства противоречат друг другу.

Оценивание. За верное решение 14 б.

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда» по естественным наукам

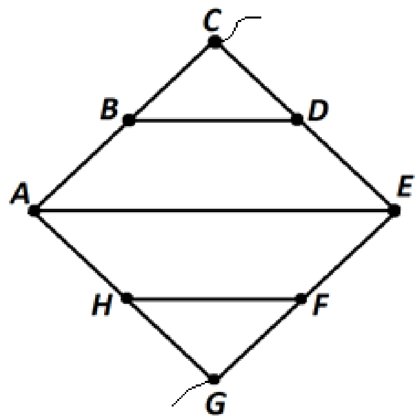
Заключительный этап 2016-2017 уч. год

Задания, ответы и критерии оценивания

8 класс
Вариант 2 физика

Задача № 5 (10 баллов)

При построении данной конструкции использовалась однородная проволока постоянного сечения. Известно, что точки B, D, F и H располагаются равно посередине соответствующих сторон квадрата $ACEG$. Сопротивление отрезка AB равно $R_0 = 1\ Ом$. Определите сопротивление всей конструкции, если в электрическую цепь её подключают точками C и G.

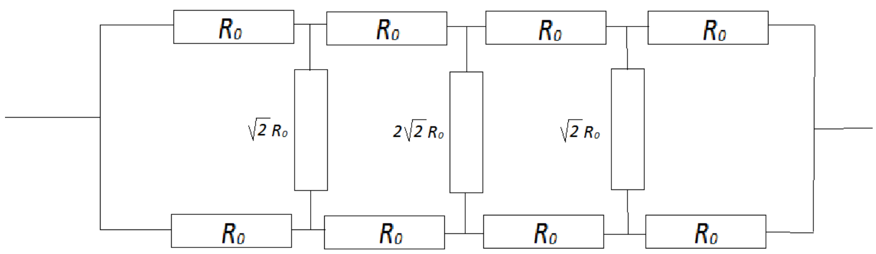


Ответ:* 2 *Ом

Решение и критерии оценивания:

Сопротивление резистора пропорционально его длине. **(2 балла)**

С учетом этого, предложенную схему можно заменить эквивалентной: **(4 балла)**



Её сопротивление: $R = 2R_0 \approx 2\ Ом$ **(4 балла)**

Задача № 6 (10 баллов)

В кастрюлю налили $3\ л$ воды, взятой при температуре $t = 0\ ^oC$, и довели её до кипения за $12\ мин$. После этого, не снимая кастрюлю с плиты, добавили лед при температуре $t = 0\ ^oC$. И в следующий раз вода начала кипеть только через $15\ мин$. Определите массу добавленного льда. Удельная теплоемкость воды $c_В = 4200\ Дж/кг \cdot {}^\circ C$, удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}3 \cdot 10^5\ Дж/кг$, плотность воды $\rho = 1000\ кг/м^3$.

Ответ: **2,1 *кг***

Решение и критерии оценивания:

Масса исходной воды: $m_B = \rho V = 3\ кг$ **(2 балла)**

Мощность плиты в первом случае: $P = \dfrac{c_B m_B \Delta T}{t_1}$. **(2 балла)**

А во втором: $P = \dfrac{\lambda m_Л + c_B m_Л \Delta T}{t_2}$. **(2 балла)**

Получаем:

$\dfrac{c_B m_B \Delta T}{t_1} = \dfrac{\lambda m_Л + c_B m_Л \Delta T}{t_2}$. Откуда $m_Л = \dfrac{c_B m_B \Delta T t_2}{t_1(\lambda + c_B \Delta T)} = \dfrac{4200 \cdot 3 \cdot 100 \cdot 15}{12(330000 + 4200 \cdot 100)} = 2{,}1\ кг$ **(4 балла)**

Задача № 7 (15 баллов)

Для того чтобы тело полностью погруженное в жидкость находилось в равновесии, к нему прикладывают силу $F = 5\ H$. Определить плотность тела, если его объем $V = 1\ л$, а плотность жидкости $\rho_Ж = 1000\ кг/м^3$.

Ответ: **1500 *кг/м*** ^{3}

Решение и критерии оценивания:

Необходимо рассматривать две ситуации: **(1 балл)**

Первая – тело пытается всплыть. В этом случае условие равновесия:

$F_a = mg + F$. **(4 балла)**

В результате получаем: $\rho_Ж g V = \rho_T V g + F$

$\rho_T = \dfrac{\rho_Ж gV - F}{gV} = \dfrac{10-5}{10\cdot 10^{-3}} = 500\,кг/м^3$ **(3 балла)**

Вторая – тело пытается утонуть. В этом случае условие равновесия:

$F_a + F = mg.$ **(4 балла)**

В результате получаем: $\rho_Ж gV + F = \rho_T Vg$

$\rho_T = \dfrac{\rho_Ж gV + F}{gV} = \dfrac{10+5}{10\cdot 10^{-3}} = 1500\,кг/м^3$ **(3 балла)**

Задача № 8 (15 баллов)

$50\,гр$ льда, взятого при температуре $t_Л = -10\ ^oC$, смешали с водой, взятой при температуре $t_B = 10\ ^oC$. Известно, что конечная температура в сосуде $t = 0\ ^oC$. Определите массу добавленной воды. Удельная теплоемкость воды $c_в = 4200\,Дж/кг\cdot{}^\circ C$, удельная теплоемкость льда $c_Л = 2100\,Дж/кг\cdot{}^\circ C$, удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}3\cdot 10^5\ Дж/кг$.

Ответ: $0{,}0028\,кг \le m_B \le 0{,}418\,кг$

Решение и критерии оценивания:

Две крайние ситуации, возможные в данной задаче:

Первая ситуация – в сосуде останется только лед при температуре $t = 0\ ^oC$

(2 балла)

Уравнение теплового баланса в этом случае: $c_Л m_Л 10 = c_B m_B 10 + \lambda m_B$. **(2 балла)**

Получаем, что: $m_B = \dfrac{2100\cdot 0{,}05\cdot 10}{4200\cdot 10 + 330000} \approx 0{,}0028\,кг$ **(2 балла)**

Вторая ситуация – в сосуде останется только вода при температуре $t = 0\ ^oC$

(2 балла)

Уравнение теплового баланса в этом случае: $c_Л m_Л 10 + \lambda m_Л = c_B m_B 10$. **(2 балла)**

Получаем, что: $m_B = \dfrac{2100\cdot 0{,}05\cdot 10 + 330000\cdot 0{,}05}{4200\cdot 10} \approx 0{,}418\,кг$ **(2 балла)**

Масса добавленной воды $0{,}0028\,кг \le m_B \le 0{,}418\,кг$ **(3 балла)**

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда» по естественным наукам

Заключительный этап 2016–2017 уч. год

Задания, ответы и критерии оценивания

7 класс

Вариант I

математика

1. Кран с холодной водой заполняет ванну за 17 мин, а с горячей за 23 мин. Открыли кран с горячей водой. Через сколько минут нужно открыть кран с холодной водой, чтобы к тому моменту, как ванна будет заполнена полностью, в ней холодной и горячей воды было поровну?

Ответ: через 3 минуты.

Решение. Половина ванны заполняется горячей водой за 11,5 минут, а холодной водой за 8,5 минут. Значит, кран с горячей водой должен быть открыт на 3 минуты дольше.

Оценивание. За верное решение 12 б.

2. На прямой отметили несколько точек, в том числе точки A и B. Рассматриваются всевозможные отрезки с концами в отмеченных точках. Вася подсчитал, что точка A находится внутри 40 из этих отрезков, а точка B внутри 42 отрезков. Сколько точек было отмечено? (Концы отрезка не являются его внутренними точками.)

Ответ: 14.

Решение. Пусть по одну сторону от точки A находится a_1 точек, а по другую a_2 точек; по одну сторону точки B b_1 точек, а по другую b_2 точек. Можно считать, что $a_1 \leqslant a_2$, $b_1 \leqslant b_2$. Тогда $a_1a_2 = 40$, $b_1b_2 = 42$. При этом $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$. Переберём всевозможные варианты разложения на множители чисел 40 и 42:

$$40 = 1 \cdot 40 = 2 \cdot 20 = 4 \cdot 10 = 5 \cdot 8; \quad 42 = 1 \cdot 42 = 2 \cdot 21 = 3 \cdot 14 = 6 \cdot 7.$$

Только в одном случае совпали суммы делителей этих двух чисел: $5+8 = 6+7$. Значит, $a_1 = 5$, $a_2 = 8$, $b_1 = 6$, $b_2 = 7$, а всего 14 точек.

Оценивание. За верное решение 12 б. За верный ответ (без обоснования) 2 б. Если показана правильность ответа, но не обоснована его единственность, 6 б.

3. Найдите сумму всех четырёхзначных чисел, в записи которых отсутствуют цифры 0, 3, 6, 9.

Ответ: $9999 \cdot 6^4/2 = 6\,479\,352$.

Решение. Все четырёхзначные числа из условия задачи разбиваются на пары чисел вида $(1111, 8888)$, $(1112, 8887)$, $(1113, 8886)$, $\ldots (4555, 5444)$. В каждой паре сумма чисел 9999. Подсчитаем количество пар. Всего четырёхзначных чисел указанного вида 6^4 (поскольку каждая цифра выбирается 4 способами). Значит, пар вдвое меньше. Сумма всех чисел равна $9999 \cdot 6^4/2 = 6\,479\,352$.

Оценивание. За верное решение 12 б. Ответ может быть представлен и формулой $9999 \cdot 6^4/2$. Если формула верная, но арифметические ошибки при вычислении по этой формуле, 10 б.

4. Какую наибольшую длину может иметь замкнутая самонепересекающаяся ломаная, идущая по линиям сетки клетчатого поля размером 8×8?

Ответ: 80.

Решение. Раскрасим узлы сетки в шахматном порядке в чёрный и белый цвет. Длина замкнутой самонепересекающейся ломаной равна количеству узлов, через которые она проходит. Каждое звено ломаной соединяет чёрный и белый узел. При обходе ломаной цвета узлов чередуются, поэтому длина замкнутой ломаной является чётным числом. Поскольку всего в сетке 81 узел, длина ломаной не более 80. Соответствующий пример легко строится (рис. 1).

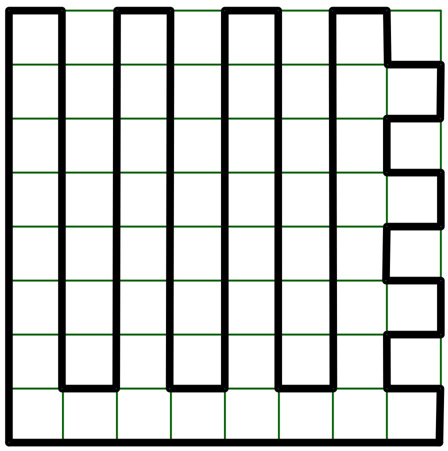


Рис. 1

Замечание. Возможно и такое рассуждение. Начнём строить замкнутую ломаную начиная с какого-то узла. Поскольку мы должны в него вернуться, горизонтальных шагов вправо столько же, сколько и влево. Значит, горизонтальных шагов чётное число. То же верно и по отношению к вертикальным шагам. Отсюда вновь получаем, что длина замкнутой ломаной (звенья которой идут по линиям по линиям сетки) является чётным числом.

Оценивание. За верное решение 14 б. Если есть только ответ, 1 б. Если приведён пример ломаной длиной 80, но нет оценки на длину ломаной, 4 б.

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»
по естественным наукам

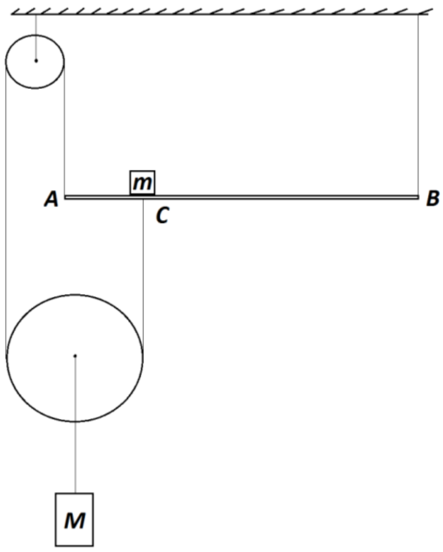
Заключительный этап
2016-2017 уч. год

Задания, ответы и критерии оценивания

7 класс
Вариант 1 физика

Задача № 5 (15 баллов)

Система, изображенная на рисунке, находится в равновесии. Известно, что у однородного стержня AB и лежащего на нем груза одинаковая масса $m = 10\ кг$, при этом груз располагается на расстоянии четверти длины стержня от его левого конца. Определите массу M второго груза, подвешенного к центру одного из блоков. Нити и блоки невесомые, трение в осях блоков отсутствует.



Ответ: **100 *кг***

Решение и критерии оценивания:

Рисунок с правильно расставленными силами. **(4 балла)**

Сила натяжения нити: $T = \dfrac{Mg}{2}$ **(3 балла)**

Правило рычага, записанное относительно точки B:

$$mg \cdot \frac{1}{2} AB + mg \cdot \frac{3}{4} AB + T \cdot \frac{3}{4} AB = T \cdot AB$$ **(5 баллов)**

В результате получаем: $M = 10m = 100\ кг$. **(3 балла)**

Задача №6 (10 баллов)

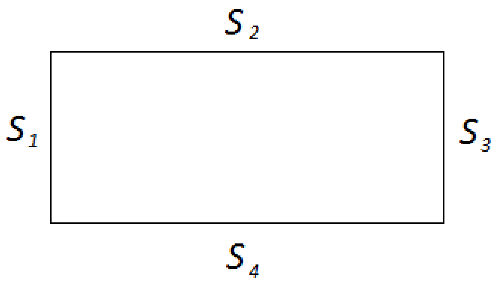
Человек пошел неторопливо по прямой со скоростью $v_1 = 1\ м/с$. В момент времени t_1 он повернул строго направо, и пошел со скоростью в $2\ раза$ большей. Еще через промежуток времени t_1 он вновь повернул строго направо, и теперь его скорость стала $3\ раза$ больше первоначальной. После последнего поворота направо, он побежал со скоростью $4v_1$, и вернулся в первоначальную точку своей траектории. Определить его среднюю скорость на всем пути.

Ответ:* 2,1 *м/с

Решение и критерии оценивания:

Из условия можно сделать вывод, что траектория человека это прямоугольник.

(2 балла)



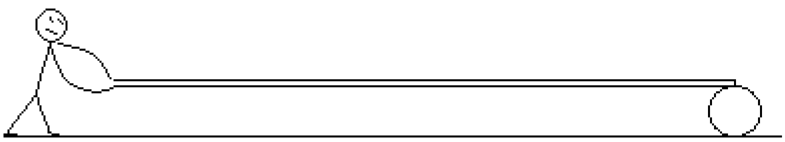
Причем, $S_2 = 2S_1$ **(2 балла)**

Средняя скорость:

$$v_{CP} = \frac{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}{t_1 + t_2 + t_3 + t_4} = \frac{6S_1}{t_1 + t_1 + \frac{S_1}{3v_1} + \frac{2S_1}{4v_1}} = \frac{6S_1}{t_1 + t_1 + \frac{t_1}{3} + \frac{t_1}{2}} = \frac{6S_1}{\frac{17}{6}t_1} = \frac{36}{17}v_1 \approx 2{,}1\ м/с$$ **(6 баллов)**

Задача 7 (10 баллов)

Человек держит один конец легкой доски, а второй её конец опирается на цилиндр, лежащий на земле. Длина доски $L = 10\ м$. Какое расстояние пройдет человек до встречи с цилиндром? Радиус колеса намного меньше длины доски. Проскальзывание отсутствует.



Ответ:* 20 *м

Решение и критерии оценивания:

Скорость человека равна скорости верхней точки цилиндра, которая в два раза больше скорости центра цилиндра. **(3 балла)**

Получаем, что расстояние, которое пройдет человек, будет в два раза больше расстояния, на которое откатился цилиндр. **(3 балла)**

Очевидно, что: $S_{человека} - S_{цилиндра} = L = 10\ м$ **(3 балла)**

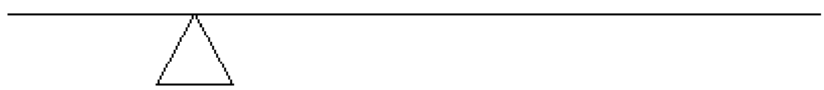
Получаем: $S_{человека} = 20\ метров$ **(1 балл)**

Задача №8 (15 баллов)

Груз решили взвесить на неравноплечих весах. Когда груз положили на одну из чашек этих весов, то с другой стороны для равновесия пришлось расположить гирьку массой $m_1 = 0{,}5\ кг$. В ситуации, когда взвешиваемый груз решили положить на другую чашку весов, то его уравновешивать пришлось уже гирькой массой $m_2 = 2\ кг$. Определите массу груза, если известно, что соотношение плеч у весов 1:3.

Ответ:* 0,875 *кг

Решение и критерии оценивания:



Исходя из условия, можно сделать вывод, что весы обладают собственной массой, которую необходимо учитывать. **(3 балла)**

Правило рычага для первого взвешивания:

$$m_г g \cdot l_л = m_1 g \cdot l_п + m_{весов} g \cdot \left(\frac{l_л + l_п}{2} - l_л \right).$$ **(4 балла)**

Правило рычага для второго взвешивания:

$$m_2 g \cdot l_л = m_г g \cdot l_п + m_{весов} g \cdot \left(\frac{l_л + l_п}{2} - l_л \right).$$ **(4 балла)**

В результате получаем: $m_г = \frac{m_1 l_п + m_2 l_л}{l_л + l_п} = \frac{3m_1 + m_2}{4} = 0{,}875\,кг$ **(4 балла)**

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда» по естественным наукам

Заключительный этап 2016–2017 уч. год

Задания, ответы и критерии оценивания

7 класс

Вариант II математика

1. Кран с холодной водой заполняет ванну за 19 мин, а с горячей за 23 мин. Открыли кран с горячей водой. Через сколько минут нужно открыть кран с холодной водой, чтобы к тому моменту, как ванна будет заполнена полностью, в ней холодной и горячей воды было поровну?

Ответ: через 2 минуты.

Решение. Половина ванны заполняется горячей водой за 11,5 минут, а холодной водой за 9,5 минут. Значит, кран с горячей водой должен быть открыт на 2 минуты дольше.

Оценивание. За верное решение 12 б.

2. На прямой отметили несколько точек, в том числе точки A и B. Рассматриваются всевозможные отрезки с концами в отмеченных точках. Вася подсчитал, что точка A находится внутри 50 из этих отрезков, а точка B внутри 56 отрезков. Сколько точек было отмечено? (Концы отрезка не являются его внутренними точками.)

Ответ: 16.

Решение. Пусть по одну сторону от точки A находится a_1 точек, а по другую a_2 точек; по одну сторону точки B b_1 точек, а по другую b_2 точек. Можно считать, что $a_1 \leqslant a_2$, $b_1 \leqslant b_2$. Тогда $a_1 a_2 = 50$, $b_1 b_2 = 56$. При этом $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$. Переберём всевозможные варианты разложения на множители чисел 50 и 56:

$$50 = 1 \cdot 50 = 2 \cdot 25 = 5 \cdot 10; \quad 56 = 1 \cdot 56 = 2 \cdot 28 = 4 \cdot 14 = 7 \cdot 8.$$

Только в одном случае совпали суммы делителей этих двух чисел: $5 + 10 = 7 + 8$. Значит, $a_1 = 5$, $a_2 = 10$, $b_1 = 7$, $b_2 = 8$, а всего 16 точек.

Оценивание. За верное решение 12 б. За верный ответ (без обоснования) 2 б. Если показана правильность ответа, но не обоснована его единственность, 6 б.

3. Найдите сумму всех четырёхзначных чисел, в записи которых отсутствуют цифры 0, 4, 5, 9.

Ответ: $9999 \cdot 6^4/2 = 6\,479\,352$.

Решение. Все четырёхзначные числа из условия задачи разбиваются на пары чисел вида $(1111, 8888)$, $(1112, 8887)$, $(1113, 8886)$, $\ldots(4555, 5444)$. В каждой паре сумма чисел 9999. Подсчитаем количество пар. Всего четырёхзначных чисел указанного вида 6^4 (поскольку каждая цифра выбирается 4 способами). Значит, пар вдвое меньше. Сумма всех чисел равна $9999 \cdot 6^4/2 = 6\,479\,352$.

Оценивание. За верное решение 12 б. Ответ может быть представлен и формулой $9999 \cdot 6^4/2$. Если формула верная, но арифметические ошибки при вычислении по этой формуле, 10 б.

4. Какую наибольшую длину может иметь замкнутая самонепересекающаяся ломаная, идущая по линиям сетки клетчатого поля размером 6×10?

Ответ: 76.

Решение. Раскрасим узлы сетки в шахматном порядке в чёрный и белый цвет. Длина замкнутой самонепересекающейся ломаной равна количеству узлов, через которые она проходит. Каждое звено ломаной соединяет чёрный и белый узел. При обходе ломаной цветы узлов чередуются, поэтому длина замкнутой ломаной является чётным числом. Поскольку всего в сетке 77 узлов, длина ломаной не более 76. Соответствующий пример легко строится (рис. 2).

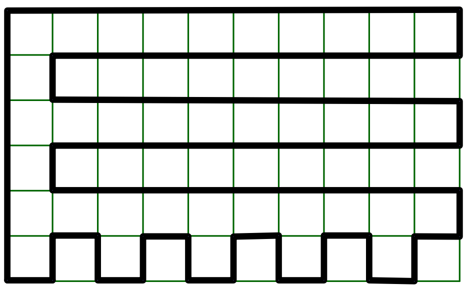


Рис. 2

Замечание. Возможно и такое рассуждение. Начнём строить замкнутую ломаную начиная с какого-то узла. Поскольку мы должны в него вернуться, горизонтальных шагов вправо столько же, сколько и влево. Значит, горизонтальных шагов чётное число. То же верно и по отношению к вертикальным шагам. Отсюда вновь получаем, что длина замкнутой ломаной (звенья которой идут по линиям по линиям сетки) является чётным числом.

Оценивание. За верное решение 14 б. Если есть только ответ, 1 б. Если приведён пример ломаной длиной 76, но нет оценки на длину ломаной, 4 б.

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»
по естественным наукам

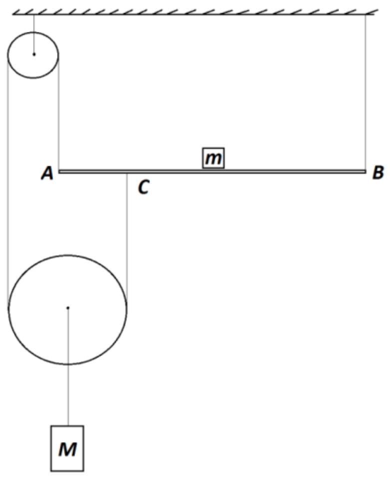
Заключительный этап
2016-2017 уч. год

Задания, ответы и критерии оценивания

7 класс
Вариант 2 физика

Задача № 5 (15 баллов)

Система, изображенная на рисунке, находится в равновесии. Известно, что у однородного стержня AB и лежащего на нем груза одинаковая масса $m = 10$ *кг*. Груз располагается ровно посередине стержня. Нить, перекинутая через блоки, прикреплена с одной стороны к концу стержня, а с другой стороны на расстоянии четверти длины стержня от его левого конца. Определите массу M второго груза, подвешенного к центру одного из блоков. Нити и блоки невесомые, трение в осях блоков отсутствует.



Ответ: **80 *кг***

Решение и критерии оценивания:

Рисунок с правильно расставленными силами. **(4 балла)**

Сила натяжения нити: $T = \dfrac{Mg}{2}$ **(3 балла)**

Правило рычага, записанное относительно точки B:

$$mg \cdot \frac{1}{2} AB + mg \cdot \frac{1}{2} AB + T \cdot \frac{3}{4} AB = T \cdot AB$$ **(5 баллов)**

В результате получаем: $M = 8m = 80$ *кг*. **(3 балла)**

Задача № 6 (10 баллов)

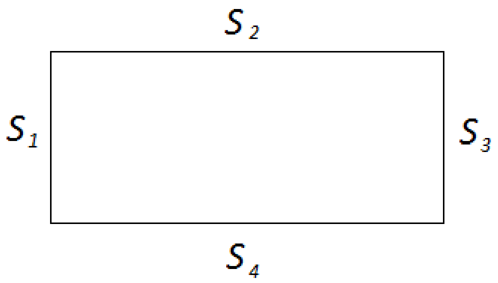
Человек пошел неторопливо по прямой со скоростью $v_1 = 0{,}5\ м/с$. В момент времени t_1 он повернул строго направо, и пошел со скоростью в $2\ раза$ большей. Еще через промежуток времени t_1 он вновь повернул строго направо, и теперь его скорость стала в $4\ раза$ больше первоначальной. После последнего поворота направо, он побежал со скоростью $5v_1$, и вернулся в первоначальную точку своей траектории. Определить его среднюю скорость на всем пути.

Ответ: **1,1 *м/с***

Решение и критерии оценивания:

Из условия можно сделать вывод, что траектория человека это прямоугольник.

(2 балла)



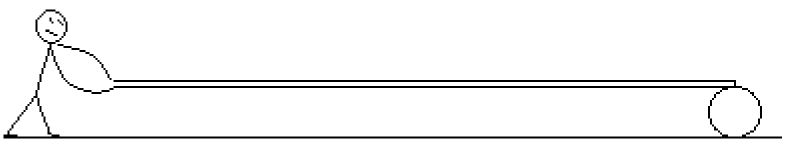
Причем, $S_2 = 2S_1$ **(2 балла)**

Средняя скорость:

$$v_{CP} = \frac{S_1+S_2+S_3+S_4}{t_1+t_2+t_3+t_4} = \frac{6S_1}{t_1+t_1+\dfrac{S_1}{4v_1}+\dfrac{2S_1}{5v_1}} = \frac{6S_1}{t_1+t_1+\dfrac{t_1}{4}+\dfrac{2t_1}{5}} = \frac{6S_1}{\dfrac{53}{20}t_1} = \frac{120}{53}v_1 \approx 1{,}1\ м/с$$ **(6 баллов)**

Задача 7 (10 баллов)

Человек держит один конец легкой доски, а второй её конец опирается на цилиндр, лежащий на земле. Длина доски $L = 10\ м$. На какое расстояние откатится цилиндр к моменту времени, как до него дойдет человек? Радиус колеса намного меньше длины доски. Проскальзывание отсутствует.



Ответ: **10 *м***

Решение и критерии оценивания:

Скорость человека равна скорости верхней точки цилиндра, которая в два раза больше скорости центра цилиндра. **(3 балла)**

Получаем, что расстояние, которое пройдет человек, будет в два раза больше расстояния, на которое откатился цилиндр. **(3 балла)**

Очевидно, что: $S_{человека} - S_{цилиндра} = L = 10\ м$ **(3 балла)**

Получаем: $S_{цилиндра} = 10\ метров$ **(1 балл)**

Задача №8 (15 баллов)

Груз решили взвесить на неравноплечих весах. Когда груз положили на одну из чашек этих весов, то с другой стороны для равновесия пришлось расположить гирьку массой $m_1 = 1\ кг$. В ситуации, когда взвешиваемый груз решили положить на другую чашку весов, то его уравновешивать пришлось уже гирькой массой $m_2 = 2\ кг$. Определите массу груза, если известно, что соотношение плеч у весов $1:2$.

Ответ:* 1,333 *кг

Решение и критерии оценивания:

Исходя из условия, можно сделать вывод, что весы обладают собственной массой, которую необходимо учитывать. **(3 балла)**

Правило рычага для первого взвешивания:

$$m_г g \cdot l_л = m_1 g \cdot l_п + m_{весов} g \cdot \left(\frac{l_л + l_п}{2} - l_л \right).$$ **(4 балла)**

Правило рычага для второго взвешивания:

$$m_2 g \cdot l_л = m_г g \cdot l_п + m_{весов} g \cdot \left(\frac{l_л + l_п}{2} - l_л \right).$$ **(4 балла)**

В результате получаем: $m_г = \frac{m_1 l_n + m_2 l_л}{l_л + l_n} = \frac{2m_1 + m_2}{3} = 1{,}333\ кг$ **(4 балла)**

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»
по естественным наукам
Заключительный этап
2016–2017 уч. год

Задания, ответы и критерии оценивания
6 класс
Вариант I математика

1. На доске написаны в ряд 99 единиц. Можно ли между некоторыми из них поставить знаки + и − так, чтобы значение получившегося выражения было равно 2017?

Ответ: можно.

Решение. Можно знаки расставить так:

$$1111-111+1111-111+11+11-1-1-1-1-1+1-1+1-1+\ldots+1-1.$$

Оценивание. За верный пример 12 б.

2. Кран с холодной водой заполняет ванну за 17 мин, а с горячей за 23 мин. Открыли кран с горячей водой. Через сколько минут нужно открыть кран с холодной водой, чтобы к тому моменту, как ванна будет заполнена полностью, в ней холодной и горячей воды было поровну?

Ответ: через 3 минуты.

Решение. Половина ванны заполняется горячей водой за 11,5 минут, а холодной водой за 8,5 минут. Значит, кран с горячей водой должен быть открыт на 3 минуты дольше.

Оценивание. За верное решение 12 б.

3. Некоторый механизм состоит из 30 деталей, часть которых крупные, часть — мелкие. Известно, что среди любых 12 взятых деталей обязательно найдется хотя бы одна мелкая, а среди любых 20 деталей — хотя бы одна крупная. Сколько каких деталей содержит механизм?

Ответ: 11 крупных деталей и 19 мелких.

Решение. Поскольку среди любых 12 деталей найдётся мелкая, крупных деталей не больше 11. Поскольку среди любых 20 деталей найдётся крупная, мелких деталей не больше 19. Если бы крупных деталей было меньше 11 или мелких — меньше 19, то всего деталей было бы меньше 30, а, по условию, их 30. Значит, крупных деталей 11, а мелких 19.

Оценивание. За верное решение 13 б. За верный ответ (без обоснования) 2 б. Если показана правильность ответа, но не обоснована его единственность, 6 б.

4. На прямой отметили несколько точек, в том числе точки A и B. Рассматриваются всевозможные отрезки с концами в отмеченных точках. Вася подсчитал, что точка A находится внутри 40 из этих отрезков, а точка B внутри 42 отрезков. Сколько точек было отмечено? (Концы отрезка не являются его внутренними точками.)

Ответ: 14.

Решение. Пусть по одну сторону от точки A находится a_1 точек, а по другую a_2 точек; по одну сторону точки B b_1 точек, а по другую b_2 точек. Можно считать, что $a_1 \leqslant a_2$, $b_1 \leqslant b_2$. Тогда $a_1 a_2 = 40$, $b_1 b_2 = 42$. При этом $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$. Переберём всевозможные варианты разложения на множители чисел 40 и 42:

$$40 = 1 \cdot 40 = 2 \cdot 20 = 4 \cdot 10 = 5 \cdot 8; \quad 42 = 1 \cdot 42 = 2 \cdot 21 = 3 \cdot 14 = 6 \cdot 7.$$

Только в одном случае совпали суммы делителей этих двух чисел: $5+8 = 6+7$. Значит, $a_1 = 5$, $a_2 = 8$, $b_1 = 6$, $b_2 = 7$, а всего 14 точек.

Оценивание. За верное решение 13 б. За верный ответ (без обоснования) 2 б. Если показана правильность ответа, но не обоснована его единственность, 6 б.

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»
по естественным наукам

Заключительный этап
2016-2017 уч. год

Задания, ответы и критерии оценивания

6 класс
Вариант 1 физика

Задача № 5 (15 баллов)

Два человека двигаются в одну сторону. В начальный момент времени расстояние между ними $S_0 = 100\,м$. Скорость первого, догоняющего, пешехода $v_1 = 8\,м/с$. Определите скорость v_2 второго, если известно, что через $t = 5\,мин$ расстояние между ними составляло $S = 50\,м$.

***Ответ*: 7,5** или **7,83**

Решение и критерии оценивания:

За $t = 5\,мин$ первый пешеход прошел: $S_1 = v_1 t = 8\cdot 5\cdot 60 = 2400\,метров$ **(5 баллов)**

Следовательно, возможно два ответа. Второй пешеход за это время прошел:

или $S_2 = 2400 - 100 - 50 = 2250\,метров$, в этом случае его скорость:

$$v_2 = \frac{S_2}{t} = \frac{2250}{5\cdot 60} = 7{,}50\,м/с$$ **(5 баллов)**

или $S_2 = 2400 - 100 + 50 = 2350\,метров$, в этом случае его скорость:

$$v_2 = \frac{S_2}{t} = \frac{2350}{5\cdot 60} \approx 7{,}83\,м/с$$ **(5 баллов)**

Задача № 6 (10 баллов)

Плотностью тела называют отношение его массы к объему, занимаемому телом. Имеется однородный куб объемом $V = 8\,дм^3$. В результате нагревания каждое из его ребер увеличилось на $4\,мм$. На сколько процентов изменилась плотность этого куба?

***Ответ*: уменьшилась на 6%**

Решение и критерии оценивания:

Объем куба: $V = a^3$, где a - длина ребра, следовательно:

$a = 2\ дм = 200мм$. **(3 балла)**

Конечная длина ребра: $a_К = 204\ мм$.

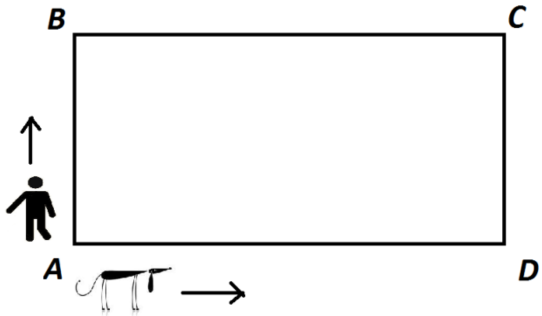
Т.е. конечный объем: $V_К = a_К^3 = 2{,}04^3 = 8{,}489664 дм^3 \approx 1{,}06V$. **(3 балла)**

Следовательно, плотность:

$\rho_К = \frac{m}{V_К} = \frac{m}{1{,}06V} = 0{,}94\frac{m}{V} \approx 0{,}94\rho$. Плотность уменьшилась примерно на 6%. **(4 балла)**

Задача № 7 (10 баллов)

Человек и его верный пес одновременно в момент времени $t_0 = 0\ мин$ начали движение по периметру квартала из точки A. Человек двигался с постоянной скоростью по часовой стрелке, а собака бежала также с постоянной скоростью против часовой стрелки (см. рис.). Известно, что в первый раз они встретились через $t_1 = 1\ мин$ после начала движения. Причем эта встреча произошла в точке B. С учетом того, что они продолжали двигаться после этого каждый в прежнем направлении и с неизменной скоростью, определите, в какой момент времени они в следующий раз одновременно окажутся в точке B. Учтите, что $AB = CD = 100м$, $BC = AD = 300\ м$.



***Ответ*: через 9 мин**

Решение и критерии оценивания:

За $t_1 = 1\ мин$ человек и собака сообща преодолели расстояние равное периметру квартала, причем человек сместился на $100\ метров$ от исходной точки путешествия.

Т.е. во время каждой следующей встречи человек будет оказываться на расстоянии $100\,метров$ от места предыдущей встречи. **(3 балла)**

Периметр квартала: $AB + BC + CD + DA = 100 + 300 + 100 + 300 = 800\,метров$. **(2 балла)**

Т.е. пройдет еще $8\,минут$ **(3 балла)**

И в следующий раз человек и собака одновременно окажутся в точке B в момент времени: $t_K = 9\,мин$. **(2 балла)**

Задача № 8 (15 баллов)

В некоторых англоязычных странах температуру измеряют в градусах Фаренгейта. Один английский школьник, наблюдая за термометром в стакане с охлаждающейся водой, заметил, что она остыла на $10°F$. Ему стало интересно, а сколько при этом тепла выделилось? В книгах он отыскал следующую формулу, которая позволяет рассчитать ответ на его вопрос: $Q = 4200 \cdot V \cdot \Delta T$, где V - объем воды в литрах, ΔT - изменение её температуры. Но изменение температуры в эту формулу необходимо подставлять в градусах Цельсия. Градусы Фаренгейта связаны с градусами Цельсия следующим соотношением $°F = °C \cdot \frac{9}{5} + 32$. Какой результат он должен получить, если в его распоряжении был $1\,л$ воды

Ответ*: 23,3 *кДж

Решение и критерии оценивания:

Изменение температуры в градусах Фаренгейта связано с изменением температуры в градусах Цельсия:

$$\Delta°F = °F_{конечная} - °F_{начальная} = °C_{конечная} \cdot \frac{9}{5} + 32 - (°C_{начальная} \cdot \frac{9}{5} + 32) = \frac{9}{5} \cdot \Delta°C.$$ **(8 баллов)**

Т.е. в градусах Цельсия вода остыла на: $\Delta°C = \frac{5}{9} \cdot \Delta°F = \frac{5}{9} \cdot 10 \approx 5{,}56\,°C$. **(3 балла)**

Следовательно, количество выделяемой теплоты:

$$Q = 4200 \cdot V \cdot \Delta T = 4200 \cdot 1 \cdot 5{,}56 \approx 23{,}3\,кДж$$ **(4 балла)**

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда» по естественным наукам

Заключительный этап 2016–2017 уч. год

Задания, ответы и критерии оценивания

6 класс

Вариант II

математика

1. На доске написаны в ряд 79 единиц. Можно ли между некоторыми из них поставить знаки + и − так, чтобы значение получившегося выражения было равно 2017?

Ответ: можно.

Решение. Можно знаки расставить так:

$$1111-111+1111-111+11+11-1-1-1-1-1+1-1+1-1+\ldots+1-1.$$

Оценивание. За верный пример 12 б.

2. Кран с холодной водой заполняет ванну за 19 мин, а с горячей за 23 мин. Открыли кран с горячей водой. Через сколько минут нужно открыть кран с холодной водой, чтобы к тому моменту, как ванна будет заполнена полностью, в ней холодной и горячей воды было поровну?

Ответ: через 2 минуты.

Решение. Половина ванны заполняется горячей водой за 11,5 минут, а холодной водой за 9,5 минут. Значит, кран с горячей водой должен быть открыт на 2 минуты дольше.

Оценивание. За верное решение 12 б.

3. Некоторый механизм состоит из 25 деталей, часть которых крупные, часть — мелкие. Известно, что среди любых 12 взятых деталей обязательно найдется хотя бы одна мелкая, а среди любых 15 деталей — хотя бы одна крупная. Сколько каких деталей содержит механизм?

Ответ: 11 крупных деталей и 14 мелких.

Решение. Поскольку среди любых 12 деталей найдётся мелкая, крупных деталей не больше 11. Поскольку среди любых 15 деталей найдётся крупная, мелких деталей не больше 14. Если бы крупных деталей было меньше 11 или мелких — меньше 14, то всего деталей было бы меньше 25, а, по условию, их 25. Значит, крупных деталей 11, а мелких 14.

Оценивание. За верное решение 13 б. За верный ответ (без обоснования) 2 б. Если показана правильность ответа, но не обоснована его единственность, 6 б.

4. На прямой отметили несколько точек, в том числе точки A и B. Рассматриваются всевозможные отрезки с концами в отмеченных точках. Вася подсчитал, что точка A находится внутри 50 из этих отрезков, а точка B внутри 56 отрезков. Сколько точек было отмечено? (Концы отрезка не являются его внутренними точками.)

Ответ: 16.

Решение. Пусть по одну сторону от точки A находится a_1 точек, а по другую a_2 точек; по одну сторону точки B b_1 точек, а по другую b_2 точек. Можно считать, что $a_1 \leqslant a_2$, $b_1 \leqslant b_2$. Тогда $a_1a_2 = 50$, $b_1b_2 = 56$. При этом $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$. Переберём всевозможные варианты разложения на множители чисел 50 и 56:

$$50 = 1 \cdot 50 = 2 \cdot 25 = 5 \cdot 10; \quad 56 = 1 \cdot 56 = 2 \cdot 28 = 4 \cdot 14 = 7 \cdot 8.$$

Только в одном случае совпали суммы делителей этих двух чисел: $5 + 10 = 7 + 8$. Значит, $a_1 = 5$, $a_2 = 10$, $b_1 = 7$, $b_2 = 8$, а всего 16 точек.

Оценивание. За верное решение 13 б. За верный ответ (без обоснования) 2 б. Если показана правильность ответа, но не обоснована его единственность, 6 б.

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»
по естественным наукам

Заключительный этап
2016-2017 уч. год

Задания, ответы и критерии оценивания

6 класс
Вариант 2

физика

Задача № 5 (15 баллов)

Два человека двигаются в одну сторону. В начальный момент времени расстояние между ними $S_0 = 200\ м$. Скорость первого, догоняющего, пешехода $v_1 = 7\ м/с$. Определите скорость v_2 второго, если известно, что через $t = 5\ мин$ расстояние между ними составляло $S = 100\ м$.

***Ответ*: 6,0** или **6,67**

Решение и критерии оценивания:

За $t = 5\ мин$ первый пешеход прошел: $S_1 = v_1 t = 7 \cdot 5 \cdot 60 = 2100\,метров$ **(5 баллов)**

Следовательно, возможно два ответа. Второй пешеход за это время прошел:

или $S_2 = 2100 - 200 - 100 = 1800\,метров$, в этом случае его скорость:

$$v_2 = \frac{S_2}{t} = \frac{1800}{5 \cdot 60} = 6{,}00\ м/с$$ **(5 баллов)**

или $S_2 = 2100 - 200 + 100 = 2000\,метров$, в этом случае его скорость:

$$v_2 = \frac{S_2}{t} = \frac{2000}{5 \cdot 60} \approx 6{,}67\ м/с$$ **(5 баллов)**

Задача № 6 (10 баллов)

Плотностью тела называют отношение его массы к объему, занимаемому телом. Имеется однородный куб объемом $V = 27\ дм^3$. В результате нагревания каждое из его ребер увеличилось на $9\ мм$. На сколько процентов изменилась плотность этого куба?

***Ответ*: уменьшилась на 8%**

Решение и критерии оценивания:

Объем куба: $V = a^3$, где a - длина ребра, следовательно:

$a = 3\ дм = 300 мм$. **(3 балла)**

Конечная длина ребра: $a_K = 309\ мм$.

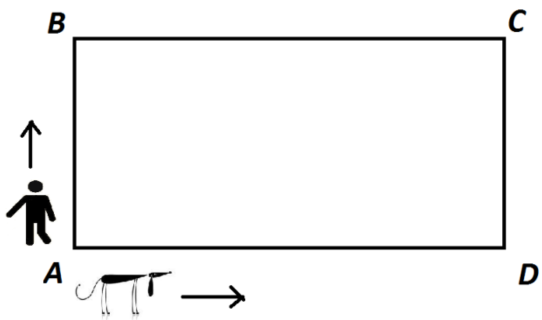
Т.е. конечный объем: $V_K = a_K^3 = 3{,}09^3 = 29{,}503629 дм^3 \approx 1{,}09V$. **(3 балла)**

Следовательно, плотность:

$\rho_K = \frac{m}{V_K} = \frac{m}{1{,}09V} = 0{,}92\frac{m}{V} \approx 0{,}92\rho$. Плотность уменьшилась примерно на 8%. **(4 балла)**

Задача № 7 (10 баллов)

Человек и его верный пес одновременно в момент времени $t_0 = 0\ мин$ начали движение по периметру квартала из точки A. Человек двигался с постоянной скоростью по часовой стрелке, а собака бежала также с постоянной скоростью против часовой стрелки (см. рис.). Известно, что в первый раз они встретились через $t_1 = 2\ мин$ после начала движения. Причем эта встреча произошла в точке B. С учетом того, что они продолжали двигаться после этого каждый в прежнем направлении и с неизменной скоростью определите, в какой момент времени они в следующий раз одновременно окажутся в точке B. Учтите, что $AB = CD = 100 м$, $BC = AD = 200\ м$.



***Ответ*: через 14 мин**

Решение и критерии оценивания:

За $t_1 = 2\ мин$ человек и собака сообща преодолели расстояние равное периметру квартала, причем человек сместился на $100\ метров$ от исходной точки путешествия.

Т.е. во время каждой следующей встречи человек будет оказываться на расстоянии $100\,метров$ от места предыдущей встречи. **(3 балла)**

Периметр квартала: $AB+BC+CD+DA=100+200+100+200=600\,метров$. **(2 балла)**

Т.е. пройдет еще $12\,минут$ **(3 балла)**

И в следующий раз человек и собака одновременно окажутся в точке B в момент времени:

$t_K=14\,мин$. **(2 балла)**

Задача № 8 (15 баллов)

В некоторых англоязычных странах температуру измеряют в градусах Фаренгейта. Один английский школьник, наблюдая за термометром в стакане с охлаждающейся водой, заметил, что она остыла на $30°F$. Ему стало интересно, а сколько при этом тепла выделилось? В книгах он отыскал следующую формулу, которая позволяет рассчитать ответ на его вопрос: $Q=4200\cdot V\cdot\Delta T$, где V - объем воды в литрах, ΔT - изменение её температуры. Но изменение температуры в эту формулу необходимо подставлять в градусах Цельсия. Градусы Фаренгейта связаны с градусами Цельсия следующим соотношением $°F=°C\cdot\frac{9}{5}+32$. Какой результат он должен получить, если в его распоряжении было $2\ л$ воды

Ответ*: 140 *кДж

Решение и критерии оценивания:

Изменение температуры в градусах Фаренгейта связано с изменением температуры в градусах Цельсия:

$\Delta°F=°F_{конечная}-°F_{начальная}=°C_{конечная}\cdot\frac{9}{5}+32-(°C_{начальная}\cdot\frac{9}{5}+32)=\frac{9}{5}\cdot\Delta°C$. **(8 баллов)**

Т.е. в градусах Цельсия вода остыла на: $\Delta°C=\frac{5}{9}\cdot\Delta°F=\frac{5}{9}\cdot 30\approx 16{,}67\,°C$. **(3 баллов)**

Следовательно, количество выделяемой теплоты:

$Q=4200\cdot V\cdot\Delta T=4200\cdot 2\cdot 16{,}67\approx 140кДж$ **(4 баллов)**